EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

RUFFINI

EQUAZIONI

I-II

TEORIA GENERALE

DELLE

EQUAZIONI,

IN CUI SI DIMOSTRA IMPOSSIBILE

LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE EQUAZIONI GENERALI DI GRADO SUPERIORE AL QUARTO

DI

PAOLO RUFFINI.

PARTE PRIMA.

BOLOGNA MDCCXCVIIII.

NELLA STAMPERIA DI S. TOMMASO D' AQUINO.

domi stato dato di determinare, ed altre di raccogliere specialmente dal chiarissimo de la Grange, ò stimato bene il congiungere tutto insieme, e insieme darlo alla luce. Ma l' ordine necessario a darsi a simili materie esigeva una certa distribuzione: quella, che seco porta una Teoria di Equazioni, sembra certamente la più opportuna; questa dunque trascelgo, e mi lusingo così di presentare al Pubblico una Teoria generale delle Equazioni adorna delle più recenti scoperte, e per quanto io sappia, la più completa finora.

Dividesi tutta l' Opera in 20 Capi. Esposte nel Capo 1.° alcune nozioni sulle Funzioni in generale, nei Capi 2.°, 3.°, 9.°, e 10.° presentansi le proprietà principali delle Equazioni. Nei Capi 4.°, 5.°, 6.°, 7.°, 8. vengono compresi i metodi di eseguire le trasformazioni, le eliminazioni, e le riduzioni. I Capi 11.°, 12.° contengono la soluzione e *a posteriori*, ed *a priori* delle Equazioni del 3.°, e 4.° grado. Il Capo 13.° dimostra l' impossibilità della soluzione algebraica delle Equazioni generali di grado maggiore del 4.° Nei Capi 14.°, 15.°, 16.°, e su 'l fine del 20.° parlasi delle Equazioni capaci di essere ridotte ad altre di grado inferiore, e i metodi vengono esposti, onde ottenere un simile abbassamento. I Capi finalmente 17.°, 18.°, 19.°, e 20.° insegnano la maniera di risolvere per approssimazione, e per Serie le Equazioni sì numeriche, che letterali, tanto determinate, che indeterminate.

Le cose, che oltre l' accennato Teorema mi lusingo di presentare, come non prive affatto di novità, son le seguenti.

1.° Una formola generale delle Funzioni esistente nel Capo 1.°, e il metodo, con cui per mezzo di questa vengono nel Capo 2.° dimostrate tutte le proprietà delle Equazioni dipendenti dal rapporto generale dei Coefficienti con le proprie Radici.

2.° Il Ristretto delle due famose Memorie di de la Grange comprendenti le

Riflessioni sovraccennate sulle Equazioni. Questo vien contenuto nei Capi 5.°, 8.°, 12.°, 15.°, nella prima parte del 13.°, ed è congiunto a dei rischiarimenti, e a delle riflessioni ulteriori.

3.° La considerazione nei Capi 7.°, 8.°, 12.°, 16.° delle funzioni irrazionali tralasciata dal chiarissimo Autore nelle indicate Memorie.

4.° Alcune considerazioni fatte nel Capo 7.° sulla eliminazione di una, due, o più incognite da un corrispondente numero di Equazioni, per cui mediante il metodo di de la Grange apparisce potersi sempre determinare con esattezza l' Equazione finale.

5.° Una dimostrazione nel Capo 8.° assai semplice, o indipendente dal Calcolo differenziale del come si determini il valore della frazione $\frac{0}{0}$, mentre però essa dipenda da funzioni di una sola variabile razionale.

6.° La dimostrazione della necessità del Caso irreducibile, qualunque via si tenga nella soluzione algebraica della Equazion generale del 3.° grado; e questa si contiene nel Capo 12.°.

7.° La soluzione nel Capo 18.° per Serie delle Equazioni algebraiche indeterminate proposte dal chiarissimo Cramer nella sua Introduzione all' Analisi delle Linee Curve, ma resa pienamente algebraica, escluso il triangolo, ed il parallelogrammo analitico, e introdottovi il principio datoci da de la Grange, onde determinare gl' infiniti, e gl' infinitesimi dello stesso ordine.

8.° Un Metodo di risolvere per Serie le Equazioni algebraiche determinate. Occupa questo il Capo 19.°; e nel Capo istesso contienesi una Formola, ed una maniera spedita, onde elevare ad una potenza qualunque b il polinomio $Lx^{\alpha} + Mx^{\alpha-1} + Nx^{\alpha-2} + Px^{\alpha-3} +$ ec.

9.° Una maniera nel Capo 20.° di risolvere per Serie col mezzo delle Frazioni continue una qualsivoglia Equazione algebraica sì determinata, che indeterminata: coincide però questo metodo con quello, che ci dà il de la Grange per la integrazione per approssimazione delle Equazioni differenziali.

10. Una raccolta finalmente, ed una riduzione di quasi tutte le principali osservazioni, e dimostrazioni, che il nostro immortale de la Grange a sposte in diverse Memorie rapporto ai diversi Teoremi generali delle Equazioni.

la integrazione per approssimazione delle Equazioni differenziali.

10. Una raccolta finalmente, ed una riduzione di quasi tutte le principali osservazioni, e dimostrazioni, che il nostro immortale de la Grange a sposte in diverse Memorie rapporto ai diversi Teoremi generali delle Equazioni.

TEORIA DELLE EQUAZIONI.

CAPO PRIMO.

Delle Funzioni in generale.

1. Col nome di *Funzione* di una, o più variabili intendiamo un Espressione analitica qualsivoglia, in cui essa, od esse si contengono sole, o congiunte a delle quantità costanti; così $5x^2$, $6az-b$ saranno due Funzioni, la prima della variabile x, la seconda della z; ed $ax^3-\frac{b^5}{z}$ sarà una Funzione di amendue le variabili x, z.

2. Affine d' indicare in generale una funzione qualunque di una, o più variabili, siamo soliti servirci della lettera f, e della parentesi; così $f(x)$ significa una qualunque funzione della x; $f(x)(y)$ ne esprime una qualsivoglia delle x, y; e $f(x)(y)(z)$ una delle x, y, z.

3. Considerando però le diverse funzioni particolari siamo soliti nell' accennarle servirci in diverse maniere della parentesi. Imperciochè 1.°, o la Funzione cangia di valore per la permutazione fra loro delle variabili in essa contenute, come succede nella funzione $ax^3-\frac{b^5}{z}$, il valore della

quale si cambia per la permutazione di z in x, venendone perciò il risultato $az^3 - \frac{b^5}{x}$, quantità generalmente ben diversa dalla $ax^3 - \frac{b^5}{z}$; 2.° o tale funzione conserva sempre il medesimo valore, qualunque permutazione si faccia tra le variabili, come si vede accadere nelle espressioni axy, $x^3 + y^3 + z^3$, il valor delle quali resta sempre il medesimo, qualunque permutazione si pratichi fra le indeterminate; 3.° o finalmente, come vedesi nelle tre $x^2 + y^2 + z$, $\frac{x}{y} + \frac{z}{u}$, $xy + zu$, la nostra funzione si conserva la medesima sotto alcune permutazioni, e si cambia sotto di altre.

Nel primo di questi casi la funzione si accenna, come è stato indicato nel (num. prec.); onde la $ax^3 - \frac{b^5}{z}$ si accennerà per $f(x)\ (z)$. Generalmente poi non essendo $ax^3 - \frac{b^5}{z} = az^3 - \frac{b^5}{x}$, non avremo corrispondentemente neppure $f(x)\ (z) = f(z)\ (x)$.

Nel caso secondo le variabili frammezzate con virgole si pongono fra due parentesi solamente, ed avremo perciò $axy = f(x, y)$; $x^3 + y^3 + z^3 = f(x, y, z)$; risultando quindi $f(x, y) = f(y, x)$; $f(x, y, z) = f(z, x, y)$ ec.

Nel terzo caso infine, se la funzione sia come me la x^2+y^2+z, s' indicherà per $f(x,y)(z)$; se essa è come la $\frac{x}{y}+\frac{z}{u}$, che resta la stessa soltanto pel cambiamento simultaneo di x in z, e di y in u, si accennerà per $f((x)(y),(z)(u))$; e se finalmente la funzione, qual' è la $xy+zu$, non cambia valore per la permutazione di amendue le x, y, in amendue le z, u, e per quella di x in y, e di z in u, essa in allora si esprimerà per $f((x,y),(z,u))$.

4. Chiameremo funzioni *Simili* tutte quelle, che ci vengono rappresentate da una medesima espression generale; e quelle diremo *Dissimili*, che ci vengono rappresentate da espressioni diverse. Saranno perciò simili fra loro le due funzioni $x+y+az^3$, $x^2+y^2+\frac{a^3}{z}$, venendo amendue rappresentate dall' espression generale $f(x,y)(z)$ (3.° N.° prec.); e saranno fra loro dissimili le due ax^2-by^3, ax^2+ay^2, venendo la prima compresa sotto la $f(x)(y)$ (1.° N.° prec.), e la seconda sotto la $f(x,y)$ (2.° N.° prec.)

5. Le Funzioni particolari, secondo la diversa forma, sotto cui racchiudono le variabili, distinguonsi in diverse spezie; altre diconsi *Intere*, qual' è la ax^3+bz, e la $\frac{a}{b}x^2-\frac{c}{e}y$, funzioni amendue, nelle quali le variabili non sono in istato di divisio-

sione; ed altre si chiamano *Fratte*, come è la $\frac{a^2 - y^2}{x^3}$, poichè in essa una variabile almeno esiste nel denominatore. Distinguonsi inoltre le funzioni in *Razionali*, ed *Irrazionali*, razionali dicendosi quelle, nelle quali non esiste variabile alcuna sotto di alcun radicale, come sono le precedenti, e le altre $ax^3 + \frac{b}{z}$, $x^2 \sqrt[3]{a} + yx \sqrt[4]{b^3}$, e chiamandosi irrazionali quelle, che sotto di un qualche vincolo radicale contengono necessariamente una qualche variabile, come appunto sono le $a\sqrt[3]{x}$, $a\sqrt[4]{xz^2} + b\sqrt{y}$. Tutte queste funzioni, la forma delle quali già si conosce, diconsi *Esplicite*, dandosi il nome d'*Implicite* a quelle, la forma, e il valor delle quali non ancor conosciuti dipendono dalla soluzione di una Equazione. Data per es. la $y^2 = a^2 - x^2$, venendone $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, la y uguaglierà una funzione della x; ma se si consideri la Equazione $y^2 = a^2 - x^2$ senza scioglierla, non sapendosi per anche qual valore, e forma abbia la funzione della x corrispondente ad y, diremo in tale stato essere la nostra y una funzione Implicita della x; le daremo poscia il nome di funzione Esplicita, allorchè sciolta l'Equazione ritroveremo essere $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$.

6. Le Funzioni finalmente dividonsi in *Uniformi*, e *Multiformi*. *Uniformi* son quelle, che ad

ogni

ogni valore delle variabili contenute, mai non acquistano, che un solo valore; nelle Equaz. $y = ax$, $y = ax - \frac{b^2}{z}$ la y non è che una funzione Uniforme nel primo caso della x, nel secondo della x, e della z. Che se ad ogni valore delle variabili, la funzione acquista più di un valore, essa in allora si dice *Multiforme*; poichè nella $y^2 = a^2 - x^2$, e però nella $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ ad ogni valore della x, la y acquista due valori, essa ne sarà una Funzion Multiforme, e più propriamente ne sarà una Funzione *Biforme*; poichè le Funzioni Multiformi distinguonsi in *Biformi*, *Triformi*, *Quadriformi* ecc. secondochè ad ogni valore delle variabili contenute, la funzione acquista due, tre, quattro ec. valori diversi.

7. Fin' ora abbiamo considerate le funzioni delle variabili, e le loro differenze; ma se una data Espression Analitica sia composta di sole quantità costanti, senza alcuna variabile, come la $3a^2 + 4bc$, anche ad essa daremo il nome di *Funzione*, ma di *Funzione Costante*, e denotandola nella maniera istessa de' (N.^{i} 2, 3) ne formeremo le stesse distinzioni degli altri (N.^{i} 4, 5, 6), onde la precedente $3a^2 + 4bc$ sarà $= f(a)\ (b, c)$.

8. Supponghiamo una funzione qualunque tra le quantità $r, s, t, u \ldots z$, che chiameremo Y, onde sia

$$(A) \quad Y = f(r)\ (s)\ (t)\ (u) \ldots (z).$$

Poi-

Poichè in essa, generalmente parlando, altri termini contengono la r, ed altri ne sono privi, indichiamo la unione di tutti i primi con la espressione $r|Y$, e con l' altra $\overset{r}{\overline{Y}}$ supponiamo di rappresentare l' unione di tutti i secondi; in egual modo $s|Y$ ci esprima la somma dei termini tutti della Y, che contengono la s, ed $\overset{s}{\overline{Y}}$ ci rappresenti tutti gli altri che ne son privi; la espressione $r\,t\,|Y$ c' indichi l' aggregato di tutti i termini, che insieme contengono e la r, e la t; l' altra $r\,|\overset{s}{\overline{Y}}$ ci rappresenti tutti i termini, che, contenendo la r, sono privi della s, e così rapporto alle altre variabili.

Se sia per es. $Y = r^3 x^2 - 4 r^2 s t + r s t u - 2 s^2 t x + 4 u x^2$ ne verrà

$$r|Y = r^3 x^2 - 4 r^2 s t + r s t u.$$

$$\overset{r}{\overline{Y}} = -2 s^2 t x + 4 u x^2.$$

$$r t|Y = -4 r^2 s t + r s t u.$$

$$r|\overset{s}{\overline{Y}} = r^3 x^2.$$

$$s t|\overset{u}{\overline{Y}} = -4 r^2 s t - 2 s^2 t x.$$

$$x|\overset{t u}{\overline{Y}} = r^3 x^2.$$

ec. ec.

9. Supposta questa maniera di scrivere, giacchè

chè sommando insieme tutti i termini della Y, che sono mancanti della r con quei tutti, che la contengono, ne risulta la Y medesima, è chiaro che avremo

(*I*) $Y = \overset{r}{\overline{Y}} + r\,|Y$. Ora fra i termini, che contengono la r espressi da $r\,|Y$, altri contengono la s, ed altri ne sono privi; unendo dunque questi a quelli, poichè risulta $r\,|Y = r\,|\overset{s}{\overline{Y}} + rs\,|Y$, otterremo con la sostituzione

(*II*) $Y = \overset{r}{\overline{Y}} + r\,|\overset{s}{\overline{Y}} + rs\,|Y$. Di nuovo fra i termini di $rs\,|Y$ altri mancano della t, ed altri nò, onde si à $rs\,|Y = rs\,|\overset{t}{\overline{Y}} + rst\,|Y$; dunque sostituendo ricaveremo

(*III*) $Y = \overset{r}{\overline{Y}} + r\,|\overset{s}{\overline{Y}} + rs\,|\overset{t}{\overline{Y}} + rst\,|Y$.

In egual modo troveremo essere

(*IV*) $Y = \overset{r}{\overline{Y}} + r\,|\overset{s}{\overline{Y}} + rs\,|\overset{t}{\overline{Y}} + rst\,|\overset{u}{\overline{Y}} + rstu\,|Y$; e proseguendo così ad operare fino all' ultima quantità z, ci risulterà

(B) $Y = \overset{r}{\overline{Y}} + r\,|\overset{s}{\overline{Y}} + rs\,|\overset{t}{\overline{Y}} + rst\,|\overset{u}{\overline{Y}} + rstu\,|\overset{x}{\overline{Y}} + \ldots\ldots + rstux\ldots.z\,|Y$.

10. Se la supposta funzione Y sia tale, che in tutti i suoi termini contenga la r, come se sia $Y = rs^2 - r^2 st + rs^2 x - r^3$; in allora non esisten-

stendo la quantità $\overset{r}{\overline{Y}}$, la precedente formola (*I*) diverrà $Y = r|Y$. Che se tutti i termini della Y oltre la r contengono insieme anche la s, come se abbiasi $Y = r^2 s^3 + r^4 s^3 x - r s^2 t$, svanendo in allora le quantità $\overset{r}{\overline{Y}}$, $r|\overset{s}{\overline{Y}}$ la formola (*II*) diventerà $Y = rs|Y$. Egualmente, se nella Y non v' abbia alcun termine privo di una qualunque delle tre quantità r, s, t, troveremo, che la formola (*III*) diviene $Y = rst|Y$, e così di seguito; onde la (B) si cangierà nella $Y = rstux \ldots . z|Y$, se non abbiavi in Y alcun termine, che insieme non contenga tutte le quantità $r, s, t, u, x \ldots . z$.

11. Se una qualunque quantità Z divenga zero, mentre si faccia zero, una variabile qualunque r, dovrà essa Z necessariamente contenere, ed essere per conseguenza funzione della variabile r; altrimenti se la Z fosse indipendente da r, come potrebbe svanire facendosi $r = 0$? Che se oltre quella di r, anche nella varia supposizione di s, t, u ec. $= 0$, la Z diventi zero, dovrà per la stessa ragione Z contenere le variabili s, t, u ec., e sarà quindi $Z = f(r)\ (s)\ (t)\ (u) \ldots .$ ec.

12. Abbiasi una quantità Y intiera razionale, e tale che divenga zero, facendosi uguale allo zero una qualunque delle variabili r, s, t, u ec. z; in tale supposizione io dico, che dovrà essere $Y = rstu \ldots . z|Y$.

Pel (N.° prec.) abbiamo $Y = f(r)\ (s)\ (t)\ (u)$

$\ldots .$

....(z); e perciò $Y=Y^{\overline{r}}+r|Y^{\overline{s}}+rs|Y^{\overline{t}}+rst|Y^{\overline{u}}+rstu|Y^{\overline{x}}+\ldots+rstux\ldots z\,|Y$ (N.° 9); ma per essere Y quantità intiera, è chiaro essere questa una funzione, in cui i termini $r|Y^{\overline{s}}$, $rs|Y^{\overline{t}}$, ec. devono contenere la r in forma di moltiplicazione; i termini $rs|Y^{\overline{t}}$, $rst|Y^{\overline{u}}$ ec. devono tutti venire moltiplicati per s, e così in progresso; dunque se in $Y=Y^{\overline{r}}+r|Y^{\overline{s}}+rs|Y^{\overline{t}}+$ ec. si farà $r=0$, svanendo tutti i termini $r|Y^{\overline{s}}$, $rs|Y^{\overline{t}}$, ec., otterremo $Y=Y^{\overline{r}}$; ma per la ipotesi di $r=0$ deve seguirne $Y=0$, e frattanto per tale supposizione la quantità $Y^{\overline{r}}$ non può giammai diventare zero, poichè non contiene la r di sorta alcuna; dunque acciocchè in realtà, facendosi $r=0$, risulti $Y=0$, dovrà la porzione $Y^{\overline{r}}$ mancare affatto dalla proposta Formola, ed avremo perciò $Y=r|Y^{\overline{s}}+rs|Y^{\overline{t}}+rst|Y^{\overline{u}}+$ ec. Supponghiamo presentemente $s=0$, ne verrà $Y=r|Y^{\overline{s}}$; ma per tale ipotesi non può essere $r|Y^{\overline{s}}=0$; e deve intanto risultare $Y=0$; dunque

que, acciocchè questo succeda, dovrà il termine $r|\overset{s}{\overline{Y}}$ mancare anch' esso dalla nostra formola, e perciò avremo $rs|\overset{t}{\overline{Y}} + rst|\overset{u}{\overline{Y}} +$ ec. pel valore di Y. Proseguendo nell' istesso modo il discorso fino all' ultima quantità z, troveremo in egual maniera dovere nella nostra supposizione mancare dalla Y i termini tutti $rs|\overset{t}{\overline{Y}}$, $rst|\overset{u}{\overline{Y}}$ ec., e quindi resterà $Y = rstu \ldots z|Y$. C. d. d.

13. Dovrà dunque la nostra Y contenere solamente dei termini, i quali siano moltiplicati pel prodotto di tutte le sopradette variabili r, s, t, u ec. z, onde avremo $Y = rstu \ldots z S$, rappresentando S l' aggregato di tutti i termini sovraccennati.

14. Siano ora le variabili $r, s, t, u \ldots z$ di numero n, ed m rappresenti la massima lor dimensione in Y. Vedesi, ciò posto, che non potrà nella nostra ipotesi essere giammai $m < n$. Che se abbiasi $m = n$, in allora la S non potrà contenere alcuna delle variabili $r, s, t, u \ldots z$; e se sia $m > n$, cosicchè $m = n + p$, dovrà essere S funzione di alcune, o di tutte queste variabili, esprimendo p la loro massima dimensione.

15. Supponghiamo, che la $Y = rstu \ldots z S$, non possa diventare zero, se non quando facciasi zero una qualunque delle n variabili $r, s, t, u \ldots z$. In tale caso io dico, che la S, o sarà una costan-

stante, e ciò se $n = m$ (N.° prec.), o sarà uguale ad un solo termine formato dal prodotto di tutte, o di alcune delle supposte n variabili, una, o più volte replicate di un numero p di dimensioni; e ciò mentre sia $m > n$ (N.° prec.). Difatti se la cosa fosse altrimenti, come se fosse per es. $S = rs^2tu - rs^2tz$, ossia $S = rs^2t(u - z)$; in allora diventando $S = 0$ per una qualche altra supposizione diversa da quella di r, oppure di s, oppure di t, oppure ec., o finalmente di $z = 0$, come nel nostro caso se facciasi $u = z$; per tale supposizione verrebbe a diventare zero anche la Y; ma questo è contro l' Ipotesi. Dunque ec.

16. Supposto adunque nel nostro caso in generale $S = M r^f s^g t^h u^i \ldots\ldots z^l$, essendo tali esponenti numeri tutti intieri, e positivi, essendo la loro somma $f + g + h + i \ldots\ldots + l = p$; ed essendo M una costante, avremo

$Y = rstu \ldots\ldots z S = M r^{f+1} s^{g+1} t^{h+1} \ldots\ldots z^{l+1}$,

e fatto per maggior semplicità $f + 1 = a$, $g + 1 = b$, $h + 1 = d \ldots\ldots$ ec. avremo $Y = M r^a s^b t^c u^d \ldots\ldots z^e$, ove $a + b + c + d +$ ec. $= m$.

 CA-

CAPO SECONDO.

Proprietà generali delle Equazioni.

17. Sappiamo già dall' Algebra, cosa intender si debba col nome di Equazione Algebraica determinata, e quali siano quelle quantità, che diconsi sue radici. Venga ora proposta con l' incognita x una simile Equazione, e sia questa per esempio la

$$\frac{ax^4}{m}-\frac{bx^3}{n}-cx+\frac{dx^2}{p}+f=\frac{gx^4}{p}-\frac{ex^3}{mn}+gx+\frac{b}{np}.$$

Tolte in essa le frazioni, trasporto tutti i suoi termini nel primo Membro, e venendone

$$(anp-gmn)\,x^4+(ep-bmp)\,x^3+dmnx^2-(cmnp+gmnp)\,x+(fmnp-bm)=0,$$

suppongo

$$\begin{aligned}(anp-gmn) &= F\\ (ep-bmn) &= G\\ dmn &= H\\ -(cmnp+gmnp) &= I\\ (fmnp-bm) &= K,\end{aligned}$$

avremo da ciò l' Equazione

$$Fx^4+Gx^3+Hx^2+Ix+K=0,$$

la quale altro non è, che la proposta avente tutti i suoi termini intieri, ordinati, e collocati nel primo Membro. Ora ciò, che si è detto della precedente Equazione di quarto grado, dicesi egualmente di una qualsivoglia Equazione Algebraica di un grado m, rappresentando m un numero intiero, e positivo qualunque. Dunque una tale Equaziozione potrà sempre ridursi nel modo istesso alla forma

(C) $F x^m + G x^{m-1} + H x^{m-2} + I x^{m-3} +$ ec. $+ Z = o$, ove i coefficienti F, G, H, ec., sono tutti Numeri intieri. Dividiamo presentemente questa per F, e avutone il risultato $x^m + \frac{G}{F} x^{m-1} + \frac{H}{F} x^{m-2} + \frac{I}{F} x^{m-3} +$ ec. $+ \frac{Z}{F} = o$, supponghiamo $\frac{G}{F} = A$, $\frac{H}{F} = B$, $\frac{I}{F} = C$, ec. $\frac{Z}{F} = V$, sostituisco, e ne verrà l' Equazione.

(D) $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} +$ ec. $+ L x^{m-(k+1)} + M x^{m-k} +$ ec. $+ R x^3 + S x^2 + T x + V = o$, chiamati V, $T x$, $S x^2$, ec. gli ultimi suoi termini, ed espresso per $M x^{m-k}$ un qualunque termine di essa, e per $L x^{m-(k+1)}$ quello, che a questo precede. Essa non sarà altro, che la (C) medesima; ma sì l' una, che l' altra di queste Equazioni deriva da una qualsivogia Equazione Algebraica determinata di un grado qualunque; dunque sì all' una, che all' altra potrà darsi il nome di *Equazione Algebraica Determinata Generale*; e da entrambe egualmente, attribuendo all' esponente m, ed ai Coefficienti gli opportuni valori, potremo ricavare le diverse particolari Equazioni Algebraiche determinate, avvertendo, che i Coefficienti della prima si possono bensì supporre tanti Numeri intieri, ma non già così quelli della seconda.

18. Poichè possono esistere diverse radici di una

una Equazione data, ossia diverse quantità reali, od immaginarie, le quali poste in essa in luogo della x la facciano verificare, supponghiamo di rappresentare con le lettere $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$, ec, ω le radici tutte della (C); cosicchè fuori di esse non abbiavi alcun' altra quantità capace di rendere zero con la sostituzione il primo Membro di questa Equazione. Ciò presupposto, prendiamo il primo Membro della (C), senza farlo uguale allo zero, e chiamatolo Y, consideriamo in essa la x, come variabile. Avremo così la Funzione $Y = Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} + Ix^{m-3} + \text{ec.} + Z$, ove attribuendo diversi valori alla x, è chiaro che ne verranno diversi risultati, e quando giungiamo a fare $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$, ec., la Y diverrà sempre, e solamente in tali casi $= 0$.

19. Sia per es. $m = 3$, $F = 5$, $G = -15$, $H = -50$, $I = 120$, onde la (C) riducasi alla
$5x^3 - 15x^2 - 50x + 120 = 0$,
Equazione, di cui tutte le radici sono i Numeri, $2, 4, -3$. Supponghiamo, come precedentemente,
$Y = 5x^3 - 15x^2 - 50x + 120$.
Facendo quivi $x = 1$, otterremo $Y = 5 - 15 - 50 + 120 = 60$; facendo $x = 3$, otterremo $Y = 5 \cdot 27 - 15 \cdot 9 - 50 \cdot 3 + 120 = 30$; e così di seguito, ma mentre supponghiamo $x = 2$, oppure $x = 4$, oppure $x = -3$, sempre ci risulta $Y = 0$: e ci risulta tale soltanto in questi casi.

20. Ritenute le precedenti supposizioni, e sottratta dalla variabile x ciascuna delle radici

α,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ec. ω, onde avere i binomj $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$, ec. $x-\omega$, io dico che qualunque siasi la x avremo la funzione Y eguale ad un prodotto della forma $F(x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c (x-\delta)^d \ldots (x-\omega)^e$, essendo F il coefficiente del primo termine in Y, ed essendo a, b, c, d, ec. e tutti Numeri intieri, e positivi, de' quali la somma è $= m$.

Suppongo $x-\alpha = r$, $x-\beta = s$, $x-\gamma = t$, ec. $x-\omega = z$, e ciò fatto, poichè la Y diventa sempre zero, allorchè facciasi $x=\alpha$, ovvero $x=\beta$, oppure $x=\gamma$ ec., e però mentre si supponga $x-\alpha = 0$, od $x-\beta = 0$, od $x-\gamma = 0$, ec., ossia $r=0$, od $s=0$, oppure $t=0$ ec., ne viene dal (N.° 11) che dovrà la nostra Y essere $= f(r)(s)(t)\ldots(z)$. Ma questa per l' Ipotesi essendo una funzione intiera, e razionale della x (N.i 17, 18), viene appunto ad essere una funzione delle r, s, t, ec., come quelle dei (N.i 12, 15); dunque per quanto si è colà dimostrato, dovrà essere $Y = M r^a s^b t^c \ldots z^e$ (N.° 16), esprimendo con le lettere a, b, c, ec. e tanti numeri intieri, e positivi; e però avremo $Y = M(x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\omega)^e$.

Ora in Y il numero m è il massimo esponente della x, e frattanto è chiaro, che essendo $r = x-\alpha$, $s = x-\beta$, $t = x-\gamma$, ec., la massima dimensione delle r, s, t, ec. non può che essere la massima dimensione della x. Dunque pel (N.° 16) sarà $a+b+c+$ ec. $= m$.

Fi-

Finalmente supponghiamo $x = \frac{1}{u}$; sostituendo nella $Y = Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} + Ix^{m-3} +$ ec. $= M(x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots (x-\omega)^e$, otterremo $\frac{F}{u^m} + \frac{G}{u^{m-1}} + \frac{H}{u^{m-2}} + \frac{I}{u^{m-3}} +$ ec.

$$= M\left(\frac{1}{u} - \alpha\right)^a \left(\frac{1}{u} - \beta\right)^b \left(\frac{1}{u} - \gamma\right)^c \ldots \left(\frac{1}{u} - \omega\right)^e.$$

Ma a cagione di $m = a + b + c +$ ec. $+ e$ abbiamo $u^m = u^{a+b+c+d+\text{ec.}+e} = u^a\, u^b\, u^c\, u^d \ldots\ldots u^e$. Dunque moltiplicando il primo Membro dell' Equazione ottenuta per u^m, ed il secondo per $u^a\, u^b\, u^c \ldots u^e$ fattore per fattore, otterremo $F + Gu + Hu^2 + Iu^3 +$ ec. $= M(1 - \alpha u)^a (1 - \beta u)^b \ldots\ldots\ldots$ Ora la precedente Equazione $Fx^m + Gx^{m-1} +$ ec. $= M(x-\alpha)^a (x-\beta)^b \ldots\ldots (x-\omega)^e$ si verifica sempre qualunque siasi la x, dunque anche quest' ultima dovrà sempre verificarsi, qualunque siasi la u, e però ancora, quando facciasi la $u = 0$. Eseguendo pertanto quest' ultima supposizione, avremo $F = M \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \ldots \times 1$, e quindi $M = F$. Sostituisco adunque questo valore in luogo della M, e risultandone $Y = F(x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\omega)^e$, ne siegue, che ec.

21. Pel (N.° prec.) avendosi $Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} +$ ec. $= F(x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\omega)^e$, se dividerò per F, ne verrà

$$x^m + \frac{G}{F}x^{m-1} + \frac{H}{F}x^{m-2} + \text{ec.} = (x-\alpha)^a (x-\beta)^b$$

$(x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\omega)^e$, e riponendo in luogo dei Coefficienti $\frac{G}{F}$, $\frac{H}{F}$ ec. le lettere A, B ec. (N.° 17), otterremo $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} +$ ec. $=(x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots (x-\omega)^e$. Ora le Funzioni $F x^m + G x^{m-1} + H x^{m-2} +$ ec., $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} +$ ec. altro non sono, che i primi Membri delle Equazioni (C), (D). Dunque il primo di essi essendo $= F(x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\omega)^e$, ed il secondo $=(x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\omega)^e$, qualunque siasi la x, ne viene, che le Equazioni Algebraiche saranno sempre dotate delle seguenti proprietà.

1.° Se α esprime una delle radici di una qualsivoglia Equazione Algebraica (C), (D), il suo primo Membro sarà sempre divisibile pel binomio $x-\alpha$, e ciò qualunque valore si attribuisca alla x.

2.° Chiamandosi α, β, γ, ec. ω le radici tutte della (C), (D), il primo suo Membro non solo sarà divisibile per ciascuno dei binomj $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$ ec., ma anche pel loro prodotto.

3.° Tante saranno le radici della (C), (D) quanti sono i fattori semplici $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, ec. $x-\omega$, che entrano nella formazione della quantità $F x^m + G x^{m-1} + H x^{m-2} +$ ec., $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} +$ ec. Che se abbiasi $a=1$, $b=1$, $c=1$, ec. $e=1$, il numero delle radici verrà allora espresso dal massimo esponente m dell' Equazione proposta.

4.° Nel 1.° Membro $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} +$ ec. $= (x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots\ldots (x-\omega)^e$, come pure nell' altro della (C), toltane la F, il numero dei Fattori uguali, o disuguali fra loro è sempre m; poichè $m = a + b + c + d \ldots\ldots + e$ (N.° prec.). Considerando dunque, che tante siano le radici, o uguali fra loro, o disuguali della data Equazione, quanti sono i fattori, che la formano, potremo dire in generale, che il suo massimo esponente m ci esprime sempre il numero delle sue radici.

22. Secondo questa considerazione possiamo stabilire adunque, che in una data Equazione esistono sempre delle radici uguali, ogni qualvolta alcuno, o tutti gli Esponenti a, b, c, d ec. e sono maggiori dell' unità; e che esse appariscono tutte disuguali, se ciascuna delle quantità a, b, c, d ec. sia $= 1$. In questo secondo caso però, in cui risulta $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} +$ ec. $= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots\ldots (x-\omega)$, conviene riflettere, che tutte le radici appariscono bensì fra loro disuguali, e tali sono difatti, se tutte le lettere α, β, γ ec. ω ci esprimono valori diversi; ma se abbiasi il valore di $\alpha =$ a quello di β, il valore di $\alpha =$ a quello di γ, ec.; allora anche in quest' ultima supposizione esisteranno nella Equazione delle radici uguali. Dunque tanto nel caso, in cui gli Esponenti a, b, c ec. pongonsi secondo l' opportunità maggiori, od uguali ad 1, quanto nell' altro, nel

quale

quale supponesi costantemente $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ ec. potranno le radici nella data Equazione essere uguali, o disuguali fra loro; e quindi saranno sì l' un caso, che l' altro generali egualmente. Ora la supposizione di $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ ec. riesce molto più comoda alle nostre considerazioni ulteriori; per tale ragione adunque sicuri della dovuta generalità, riterremo in avvenire piuttosto quest' ultima supposizione, e diremo perciò essere il primo Membro della data Equazion generale

(E) $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} +$ ec.
$= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \ldots (x - \omega)$.

23. Dividasi per $x - \alpha$ il primo Membro della (D); poichè la divisione deve riuscire esatta, (1.° N.° 21), è chiaro, che il quoto risulterà della forma $x^{m-1} + A' x^{m-2} + B' x^{m-3} + C' x^{m-4} +$ ec. $+ N' x^{m-(k+2)} + P' x^{m-(k+1)} +$ ec. $+ R' x^2 + S' x + T'$, chiamati A', B', C' ec. i suoi Coefficienti, e pel (N. prec.) avremo questo uguale ad $(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \ldots (x - \omega)$. Moltiplico ora da una parte, e dall' altra per x, e veggo, che ci risulta $x^m + A' x^{m-1} + B' x^{m-2} +$ ec. $+ N' x^{m-(k+1)} + P' x^{m-k} +$ ec. $+ R' x^3 + S' x^2 + T' x = x(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \ldots (x - \omega)$. Ma il prodotto $x(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \ldots (x - \omega)$ altro non è, che l' altro $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \ldots (x - \omega)$, toltane la quantità α, dunque anche la funzione $x^m + A' x^{m-1} + B' x^{m-2} +$ ec. $+ N' x^{m-(k+1)} + P' x^{m-k} +$ ec. $+ R' x^3 + S' x^2 + T' x$, altro non sarà, che la $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} +$ ec., levatine i termini, che

contengono la α, e per conseguenza è chiaro dal (N.° 8), che avremo $A' = A^{\underline{\alpha}}$, $B' = B^{\underline{\alpha}}$, $C' = C^{\underline{\alpha}}$ ec., $N' = N^{\underline{\alpha}}$, $P' = P^{\underline{\alpha}}$ ec. $R' = R^{\underline{\alpha}}$, $S' = S^{\underline{\alpha}}$, ec.

Nella medesima maniera, diviso il primo Membro della (D) per $x - \beta$, e suppostone

$x^{m-1} + A''x^{m-2} + B''x^{m-3} +$ ec.

$+ N''x^{m-(l+2)} + P''x^{m-(l+1)} +$ ec.

$+ R''x^2 + S''x + T''$ il quoto, dovrà essere

$A'' = A^{\underline{\beta}}$, $B'' = B^{\underline{\beta}}$, $C'' = C^{\underline{\beta}}$, ec.,

$N'' = N^{\underline{\beta}}$, $P'' = P^{\underline{\beta}}$, ec., $R'' = R^{\underline{\beta}}$, $S'' = S^{\underline{\beta}}$, ec.

In egual modo esprimendo per A''', B''', C''', ec. i coefficienti del quoto, che risulta dalla divisione per $x - \gamma$, avremo $A''' = A^{\underline{\gamma}}$, $B''' = B^{\underline{\gamma}}$, $C''' = C^{\underline{\gamma}}$, ec., e così di seguito.

Se ciascuno di questi quoti si uguagli allo zero, avremo così tante Equazioni del grado $m - 1$, ciascuna delle quali avrà per radici un numero $m - 1$ delle m quantità α, β, γ, $\delta \ldots \omega$.

24. L' ultimo termine V della (D) uguaglia sempre il prodotto $\pm \alpha\beta\gamma\delta \ldots \omega$, prendendosi il segno $+$, se il grado dell' Equazione è pari, ed il segno $-$, se esso è dispari.

Dovendosi l' Equazione (E) pei (N.i 20, 22) verificare, qualunque siasi la x, sarà anche vera, allor

allor quando si faccia $x = 0$; eseguisco pertanto una tale supposizione, e quindi otterremo $V = -\alpha \times -\beta \times -\gamma \times -\delta \ldots \times -\omega$, cioè uguale al prodotto delle quantità $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta, \ldots -\omega$. Ora se il numero dei fattori $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, ec., e però il grado m dell' Equazione (D) è pari, simile prodotto viene affetto di segno $+$, e se quello è dispari, viene questo affetto di segno $-$. Dunque seguendo l' enunciata regola, avremo $V = \pm \alpha\beta\gamma\delta \ldots \omega$.

25. Il Coefficiente T del penultimo termine Tx nella (D) è sempre uguale alla somma dei prodotti ad $m-1$, ad $m-1$ delle m radici α, β, γ, ec. presa col segno $+$, se $m-1$ è pari, e col segno $-$, se $m-1$ è dispari.

Applicando ai Quoti del (N.° 23) quanto si è detto nel (N. 24) abbiamo

$$T' = \pm \beta\gamma\delta\eta \ldots \omega$$
$$T'' = \pm \alpha\gamma\delta\eta \ldots \omega$$
$$T''' = \pm \alpha\beta\delta\eta \ldots \omega$$
$$T^{V} = \pm \alpha\beta\gamma\eta \ldots \omega$$

ec. ec.

risultati, ne' quali entrando un numero $m-1$ delle α, β, γ ec. dovrà apporsi il segno superiore, se $m-1$ è pari, l' inferiore, se $m-1$ è dispari. Ora dal (N.° 10) vedesi, che abbiamo $T'' = \alpha \mid T''$, $T''' = \alpha\beta \mid T'''$, $T^{V} = \alpha\beta\gamma \mid T^{V}$ ec., onde a cagione di $T' = T^{\frac{\alpha}{\ }}$, $T'' = T^{\frac{\beta}{\ }}$, $T''' = T^{\frac{\gamma}{\ }}$, $T^{V} = T^{\frac{\delta}{\ }}$, ec.

ec. (N. 23) ci risulta $T'' = \alpha \,|\, T^{\underline{\beta}}$, $T''' = \alpha\beta \,|\, T^{\underline{\gamma}}$, $T^{\text{v}} = \alpha\beta\gamma \,|\, T^{\underline{\delta}}$, ec.. Dunque pel (N. 9) essendo $T = T^{\underline{\alpha}} + \alpha \,|\, T^{\underline{\beta}} + \alpha\beta \,|\, T^{\underline{\gamma}} + \alpha\beta\gamma \,|\, T^{\underline{\delta}}$ + ec. con la sostituzioue otterremo $T = T' + T'' + T''' + T^{\text{v}}$ + ec., e quindi $T = \pm\,(\beta\gamma\delta\eta \ldots\ldots \omega + \alpha\gamma\delta\eta \ldots\ldots \omega + \alpha\beta\delta\eta \ldots\ldots \omega + \alpha\beta\gamma\eta \ldots\ldots \omega + \alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \omega + \alpha\beta\gamma\delta\eta \ldots\ldots$ + ec.) Dunque ec.

26. Supponghiamo di voler formare la somma di tutti i prodotti a' trè a' trè delle cinque radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$. Chiamata C una simile somma, pel (N. 9) abbiamo $C = C^{\underline{\alpha}} + \alpha \,|\, C^{\underline{\beta}} + \alpha\beta \,|\, C^{\underline{\gamma}} + \alpha\beta\gamma \,|\, C^{\underline{\delta}}$ + ec.; ma le radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$ non si possono contenere nei termini $C^{\underline{\alpha}}$, $\alpha \,|\, C^{\underline{\beta}}$, ec., che a' trè a' trè, ed in modo di moltiplicazione; dunque la nostra formola non potrà estendersi, che al termine $\alpha\beta\gamma \,|\, C$, essendo quest' ultimo $= \alpha\beta\gamma$. Poichè dunque àbbiamo $C = C^{\underline{\alpha}} + \alpha \,|\, C^{\underline{\beta}} + \alpha\beta \,|\, C^{\underline{\gamma}} + \alpha\beta\gamma$, è chiaro che otterremo la somma domandata, formando da prima tutti i prodotti a' trè a' trè, ossia tutti i terni frà le radici $\beta, \gamma, \delta, \omega$ espressi dal termine $C^{\underline{\alpha}}$, tenendo conto in seguito di tutti questi prodotti, che signi-

fica-

ficati essendo dal termine $\alpha\,|\,C^{\overline{\beta}}$, contengono la α, e mancano della β, poscia formando, come si vede dal termine $\alpha\beta\,|\,C^{\overline{\gamma}}$, tutte le combinazioni a' trè a' trè, che prive della γ contengono ed α, e β, e finalmente formando nel termine $\alpha\beta\gamma$ il solo terno, che contiene unite ed α, e β, e γ. Così operando adunque avremo la richiesta somma $C = \gamma\delta\omega + \beta\delta\omega + \beta\gamma\omega + \beta\gamma\delta + \alpha\delta\omega + \alpha\gamma\omega + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\omega + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma$.

27. Ciò che si è detto delle combinazioni a' trè a' trè fra cinque radici, dicendosi egualmente di altri prodotti qualsivogliano a' k, a' k di un qualunque numero m di radici, se vorremo la Somma di questi prodotti, chiamata essa M, poichè abbiamo dalla (B) $M = M^{\overline{\alpha}} + \alpha\,|\,M^{\overline{\beta}} + \alpha\beta\,|\,M^{\overline{\gamma}} + \alpha\beta\gamma\,|\,M^{\overline{\delta}}$ + ec., vedesi, che l' otterremo col formare in principio l' aggregato $M^{\overline{\alpha}}$ di tutti i prodotti a' k, a' k fra tutte le radici date, esclusane la α; coll' unir questo poscia alla Somma $\alpha\,|\,M^{\overline{\beta}}$ di simili combinazioni, che contenendo la α, sono mancanti di β; unendo in terzo luogo alle precedenti $M^{\overline{\alpha}}$, $\alpha\,|\,M^{\overline{\beta}}$ la somma $\alpha\beta\,|\,M^{\overline{\gamma}}$ di tali prodotti, che privi della γ contengono, ed α, e β; e così proseguendo secondo le regole accennate nel (N. prec.).

28. Se viceversa troveremo essere $C = C^{\underline{\alpha}} + \alpha|C^{\underline{\beta}} +$ ec., od una quantità qualunque $M = M^{\underline{\alpha}} + \alpha|M^{\underline{\beta}} + \alpha\beta|M^{\underline{\gamma}} +$ ec., e se sapremo d' altronde $C^{\underline{\alpha}}$ uguagliare la Somma di tutti i terni fra le β, γ, δ, ω; $M^{\underline{\alpha}}$ uguagliare l' aggregato a' k, a' k fra le m radici della data, esclusane la α; $C^{\underline{\beta}}$ uguagliare tutti i Terni fra le α, γ, δ, ω, $M^{\underline{\beta}}$ essere uguale all' aggregato di tutti i prodotti a' k, a' k fra le m radici senza la β, $C^{\underline{\gamma}}$, $M^{\underline{\gamma}}$ uguagliare il primo tutti i terni fra le α, β, δ, ω, il secondo tutte le combinazioni a' k, a' k fra le m radici senza la γ, e così in progresso; io dico, che in allora C sarà uguale ai terni tutti fra le cinque quantità α, β, γ, δ, ω, che M uguaglierà la somma di tutti i prodotti a' k a' k di tutte le m radici proposte.

In questa supposizione la somma delle quantità $C^{\underline{\alpha}}$, $\alpha|C^{\underline{\beta}}$, $\alpha\beta|C^{\underline{\gamma}}$ ec. ci viene a dare la somma di tutti i terni fra le β, γ, δ, ω, più la somma di quei terni, che mancano della β, e contengono la α, più gli altri, che privi della γ contengono α, e β, e così di seguito. Ma questo è

ap-

appunto ciò, che si richiede per la formazione di tutti i terni delle cinque radici date (N.° 26). Dunque la nostra C, che è uguale alla somma delle quantità $C^{\overline{\alpha}}$, $\alpha|C^{\overline{\beta}}$, $\alpha\beta|C^{\overline{\gamma}}$ ec. uguaglierà ancora l' aggregato di tutti i terni fra le α, β, γ, δ, ω.

Ora questo stesso dicesi in egual modo delle quantità $M^{\overline{\alpha}}$, $\alpha|M^{\overline{\beta}}$, $\alpha\beta|M^{\overline{\gamma}}$ ec. rapporto alla M, ed ai prodotti a k, a k delle m radici proposte. Dunque anche la M sarà uguale alla somma di tutti questi prodotti. C. d. d.

29. Nella (D) il coefficiente S dell' antepenultimo termine Sx^2 uguaglia la somma di tutti i prodotti ad $m-2$, ad $m-2$ di tutte le m radici dell' Equazione data; il coefficiente R del termine Rx^3 è uguale all' aggregato di tutti i prodotti ad $m-3$, ad $m-3$ delle radici medesime; il Coefficiente Q del termine Qx^4 uguaglia la somma di tutti i loro prodotti ad $m-4$, ad $m-4$, e così di seguito; prendendosi ciascuna di queste somme positiva, se $m-2$ rapporto ad S, $m-3$ riguardo ad R, $m-4$ rapporto a Q ec., sono pari, e prendendosi essa negativa, se tai numeri sono dispari.

1.° Nei quoti del (N.° 23) essendo le quantità S', S'', S''', S^{v} ec. i Coefficienti dei penultimi rispettivi termini $S'x$, $S''x$, $S'''x$, $S^{v}x$ ec., ed essendo $m-1$ il grado di questi quoti considerati come Equazioni, pel (N.° 25) avremo $S' = \pm$ la somma di tutti i prodotti ad $m - 2$, ad $m - 2$ delle radici β, γ, δ ec., $S'' = \pm$ l' aggregato di tutti i prodotti ad $m - 2$, ad $m - 2$ delle α, γ, δ ec. $S''' = \pm$ la somma di tutte queste combinazioni fra le α, β, δ ec., e così di seguito, prendendosi il segno superiore, quando $m - 2$ è pari, e l' inferiore, quando $m - 2$ è dispari. Ora abbiamo

$$S' = S^{\frac{\alpha}{}}, S'' = S^{\frac{\beta}{}}, S''' = S^{\frac{\gamma}{}}, S^{\text{IV}} = S^{\frac{\delta}{}} \text{ ec.}$$

(N.° 23). Dunque nel (N.° 28) posta in luogo di M la S, ed $m - 2$ invece di k troveremo essere S = alla somma di tutti i prodotti ad $m - 2$, ad $m - 2$ fra le radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ec. affetta del segno +, mentre $m - 2$ sia pari, e del segno — in caso contrario.

2.° Quanto si è ora dimostrato dell' antepenultimo Coefficiente S nella (D), applicandosi egualmente al Coefficiente dell' antepenultimo termine in ciascuno dei quoti del (N.° 23), ne viene, che sarà $R' =$ all' aggregato dei prodotti tutti ad $m - 3$, ad $m - 3$ delle β, γ, δ ec., $R'' =$ alla somma di tali combinazioni fra le α, γ, δ ec., $R''' =$ all' aggregato di questi prodotti fra le α, β, δ ec., e così in progresso, premettendosi a tali somme il segno +, od il segno —, secondo che $m - 3$ è pari, o dispari. Ma pel (N.° 23)

$$R' = R^{\frac{\alpha}{}}, R'' = R^{\frac{\beta}{}}, R''' = R^{\frac{\gamma}{}}, \text{ ec.}$$

Dunque facendo nel (N.° 28) M = R, $k = m - 3$ ci ri-

risulterà R $= \pm$ la somma di tutti i prodotti ad $m-3$, ad $m-3$ di tutte le α, β, γ, δ ec., prendendosi essa col segno superiore, se $m-3$ è pari, e se $m-3$ è dispari, con l' inferiore.

3.° La proprietà dimostrata presentemente nel Coefficiente dell' antepenultimo termine della (D) si verifica egualmente nei Coefficienti Q', Q'', Q''', Q^{IV}, ec. (N.° 23), onde ànnosi questi rispettivamente uguali ai prodotti ad $m-4$, ad $m-4$ fra le β, γ, δ ec., fra le α, γ, δ ec. fra le α, β, δ ec., presi col segno positivo, o negativo, secondo che il Numero $m-4$ è pari, o dispari. Dunque, replicati gli stessi precedenti discorsi, e supposta nel (N.° 28) $M = Q$, $k = m-4$, troveremo così essere con l' accennata regola dei segni $Q = \pm$ l' unione di tutti i prodotti ad $m-4$, ad $m-4$ fra le α, β, γ, δ ec.

4.° Lo stesso si dimostra nel Coefficiente del termine Px^5, e così via via degli altri tutti, trovandosi per tal modo $P = \pm$ l' aggregato dei prodotti tutti ad $m-5$, ad $m-5$; $N = \pm$ la somma delle combinazioni ad $m-6$, ad $m-6$ fra tutte le radici α, β, γ, δ ec., e così di seguito, prendendosi in esse il segno $+$, o il segno $-$, secondo che abbiamo rispettivamente pari, o dispari i Numeri $m-5$, $m-6$ ec. Dunque ec.

30. Riduciamo la (D) alla forma $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} +$ ec. $+ Lx^{m-(k-1)} + Mx^{m-k} +$ ec. $+ Px^{m-(m-5)} + Qx^{m-(m-4)}$

$+ R x^{m-(m-3)} + S x^{m-(m-2)} + T x^{m-(m-1)}$
$+ V x^{m-m} = 0$.

In questa si vede, che nell' ultimo termine $V x^{m-m}$, ove nell' esponente della x da m togliesi m, abbiamo il Coefficiente $V = \pm$ il prodotto di tutte le m radici α, β, γ, δ ec., nel penultimo termine, in cui da m sottraesi $m - 1$, il Coefficiente, che corrisponde, T uguaglia $\pm$ la somma dei prodotti tutti ad $m - 1$, ad $m - 1$ delle medesime α, β, γ, δ ec.; laddove da m si toglie $m - 2$, si à il Coefficiente $S = \pm$ i prodotti tutti ad $m - 2$, ad $m - 2$ ec. Ora lo stesso si osserva in tutti gli altri termini. Dunque potremo dire in generale, che il Coefficiente di un termine qualsivoglia è sempre uguale all' aggregato di tutti i prodotti delle radici α, β, γ, δ ec. combinate a tante fra loro, quanto nel rispettivo esponente della x è il numero, che si sottrae dalla m; osservando poi, se questo numero, che si sottrae è pari, o dispári, poichè nel primo caso all' esposto aggregato deve apporsi il segno $+$, nel secondo il segno $-$.

31. Pertanto avremo il Coefficiente del secondo termine $A = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots)$ uguale alla somma delle radici tutte presa col segno contrario.

Avremo il Coefficiente del terzo termine $B = +(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \ldots\ldots)$ uguale all' aggregato di tutti gli Ambi fra le radici preso col segno naturale.

Sarà il Coefficiente del quarto termine

C =

$C = -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \ldots)$ uguale alla somma di tutti i Terni fra le radici presa col segno contrario, e così di seguito.

Abbiasi per esempio l' Equazione $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 12x + 36 = 0$, di cui le radici sono $1, 6, -2, -3$. Chiamati A, B, C, D i suoi Coefficienti, pel dimostrato dovrà essere

$A = -(1 + 6 - 2 - 3)$,

$B = +(1 \times 6 + 1 \times -2 + 1 \times -3 + 6 \times -2 + 6 \times -3 - 2 \times -3)$,

$C = -(1 \times 6 \times -2 + 1 \times 6 \times -3 + 1 \times -2 \times -3 + 6 \times -2 \times -3)$,

$D = +1 \times 6 \times -2 \times -3$; e difatti, eseguito il calcolo si ritrova $A = -2$, $B = -23$, $C = -12$, $D = +36$.

32. Se l' Equazione proposta manchi di un qualche termine, come è la $x^3 - 19x + 30 = 0$, ove manca il secondo termine, ciò indica, che la somma, la quale corrisponde al Coefficiente del termine mancante, è uguale allo zero; imperciocchè possiamo sempre scrivere un tal termine nell' Equazione senza turbarla, apponendovi lo zero per Coefficiente. L' Equazione precedente riducesi così alla $x^3 + 0x^2 - 19x + 30 = 0$, ed essendo $2, 3, -5$ le sue radici, abbiamo difatti la loro somma $2 + 3 - 5 = 0$.

33. Nel (N.° 23) si sono indicati con le lettere A', B', C', D' ec. i Coefficienti del quoto, che deve risultare dalla divisione del primo Membro della (D) per $x - \alpha$; cerchiamo presentemente

te

te di determinare, quale sia il valore di questi Coefficienti, mentre in realtà si effettui una simile divisione.

Avendosi pel (N.° 31) $A = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ ec.) sarà $\alpha + A = -(\beta + \gamma + \delta +$ ec.). Ma pel (Numero istesso) deve essere anche $A' = -(\beta + \gamma + \delta +$ ec.). Dunque avremo $A' = \alpha + A$.

Poichè B uguaglia tutti gli Ambi fra le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ec., e B' tutti gl' Ambi fra le β, γ, δ ec. (N. 31), ne segue che sarà $B = B' +$ la somma di tutti gli Ambi, che contengono α; ora quest' ultima somma è evidentemente eguale ad $\alpha(\beta + \gamma + \delta +$ ec.), e frattanto abbiamo $\beta + \gamma + \delta +$ ec. $= -A'$; dunque essendo $\alpha(\beta + \gamma + \delta +$ ec.) $= -\alpha A'$, con la sostituzione otterremo $B = B' - \alpha A'$.

Uguagliando C tutti i terni fra le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ec., e C' tutti i terni fra le β, γ, δ ec. presi col segno $-$, avremo $C = C' -$ la somma dei terni, che contengono α; ma questa somma è uguale ad $\alpha(\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta +$ ec.), e però uguale ad $\alpha B'$; dunque sostituendo avremo $C = C' - \alpha B'$.

Essendo i Coefficienti D, D' uguali a tutte le quaderne, il primo tra le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ec., il secondo fra le β, γ, δ ec. (N.° 31), ne verrà $D = D' + \alpha(\beta\gamma\delta +$ ec.); e quindi a cagione di $\beta\gamma\delta +$ ec. $= -C'$, otterremo $D = D' - \alpha C'$.

Nella maniera medesima si trova $E = E' - \alpha D'$, $F = F' - \alpha E'$ ec., e il Coefficiente $M = M' - \alpha L'$.

Ciò posto ponghiamo nella Equazione

$B = B' - \alpha A'$, ossia nella $B' = \alpha A' + B$, il valore di $A' = \alpha + A$; e così nelle altre $C = C' - \alpha B'$, $D = D' - \alpha C'$, $E = E' - \alpha D'$ ec., ossia nelle $C' = \alpha B' + C$, $D' = \alpha C' + D$, $E' = \alpha D' + E$ ec., i valori successivi, che risultano, e otterremo così

$$
\begin{aligned}
A' &= \alpha + A,\\
B' &= \alpha^2 + A\alpha + B,\\
C' &= \alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C,\\
D' &= \alpha^4 + A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D,\\
E' &= \alpha^5 + A\alpha^4 + B\alpha^3 + C\alpha^2 + D\alpha + E,\\
&\text{ec.} \quad \text{ec.} \quad \text{ec.} \quad \text{ec.} \quad \text{ec.} \quad \text{ec.} \quad \text{ec.}\\
M' &= \alpha^k + A\alpha^{k-1} + B\alpha^{k-2} + \text{ec.} + L\alpha + M;
\end{aligned}
$$

e questi saranno i valori dei Coefficienti nel quoto supposto; noi li vedremo risultare attualmente, se attualmente divideremo per $x - \alpha$ la quantità $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} + \text{ec.}$ $+ L x^{m-(k-1)} + M x^{m-k} + \text{ec.} + V$.

Dividendo il primo membro dell' Equazione $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 12x + 36 = 0$ per $x - 6$; il quoto sarà $x^3 + A'x^2 + B'x + C'$, avendosi $A' = 6 - 2 = 4$, $B' = 6^2 - 2.6 - 23 = 1$, $C' = 6^3 - 2.6^2 - 23.6 - 12 = -6$,

34. Indichiamo con la lettera Σ la parola somma; supponghiamo, che l' espressione Σx ci denoti la somma $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{ec.} + \omega$, l' altra Σx^2 c' indichi la somma dei quadrati $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{ec.} \ldots\ldots + \omega^2$, la terza Σx^3 ci esprima l' aggregato dei cubi $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{ec.} + \omega^3$, e così di seguito; per modo che in generale Σx^k indichi l' unione di tutte le *kesime*

po-

potenze $\alpha^k + \beta^k + \gamma^k + \delta^k +$ ec. $+ \omega^k$. Ciò posto io dico, che avremo

(F) $\Sigma x^k + A \Sigma x^{k-1} + B \Sigma x^{k-2} + C \Sigma x^{k-3} + \ldots\ldots + H \Sigma x^3 + I \Sigma x^2 + L \Sigma x + k M = 0$.

Affine di avere tutti gli Ambi, che si possono fare con le nostre m radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ec. ω, sappiamo dall' Algebra non doversi far altro, che combinare ciascuna di tali radici con tutte le altre $m-1$, e poi prendere la metà del risultato; affine di avere i Terni, sappiamo doversi unire ciascuna radice con tutti gli Ambi possibili fra le altre $m-1$ che restano, prendendone in seguito la terza parte; e in generale, onde ottenere tutte le combinazioni a k a k delle m quantità supposte, sappiamo, che ciascuna di esse devesi moltiplicare con tutte le combinazioni a $k-1$, a $k-1$ delle altre $m-1$ radici, e che il risultato devesi poscia dividere per k. Avendosi dunque pel (N. 33) ciascuna delle quantità $A', A'', A''', A^{\text{v}}$ ec. $= -$ la somma semplice, ciascuna delle $B', B'', B''', B^{\text{v}}$ ec. $= +$ la somma degli Ambi, cadauna delle $C', C'', C''', C^{\text{v}}$ ec. $= -$ l' aggregato dei Terni, ed essendo così ciascun Coefficiente $L', L'', L''', L^{\text{v}}$ ec. $= \pm$ l' aggregato dei prodotti a $k-1$, a $k-1$ di un numero $m-1$ fra le m radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \omega$, toltane la α rapporto alle quantità A', B', C' ec. L', toltane la β riguardo alle A'', B'', C'' ec. L'', la γ relativamente alle A''', B''', C''' ec. L''', e così di seguito, ne viene, che sarà

B =

$$B = -\frac{1}{2}(\alpha A' + \beta A'' + \gamma A''' + \delta A'^{v} + \text{ec.}),$$
$$C = -\frac{1}{3}(\alpha B' + \beta B'' + \gamma B''' + \delta B^{v} + \text{ec.}),$$
$$D = -\frac{1}{4}(\alpha C' + \beta C'' + \gamma C''' + \delta C'^{v} + \text{ec.}),$$

ec. ec. ec. ec.

$$M = -\frac{1}{k}(\alpha L' + \beta L'' + \gamma L''' + \delta L'^{v} + \text{ec.}).$$

Ora tenendo conto soltanto di quest' ultima riga, come del caso generale, da cui tutti gli altri possonsi ricavare, osservo che essa si riduce alla
$$kM = -(\alpha L' + \beta L'' + \gamma L''' + \delta L'^{v} + \text{ec.}).$$

Ma pel (N.° 33) abbiamo
$$L' = \alpha^{k-1} + A\alpha^{k-2} + B\alpha^{k-3} + C\alpha^{k-4} + \dots + H\alpha^2 + I\alpha + L,$$
e nel modo medesimo si trova
$$L'' = \beta^{k-1} + A\beta^{k-2} + B\beta^{k-3} + C\beta^{k-4} + \dots + H\beta^2 + I\beta + L,$$
$$L''' = \gamma^{k-1} + A\gamma^{k-2} + B\gamma^{k-3} + C\gamma^{k-4} + \dots + H\gamma^2 + I\gamma + L,$$
$$L' = \delta^{k-1} + A\delta^{k-2} + B\delta^{k-3} + C\delta^{k-4} + \dots + H\delta^2 + I\delta + L,$$
ec. ec.

Dunque sostituendo avremo
$$\begin{aligned} kM = & -(\alpha^k + \beta^k + \gamma^k + \delta^k + \dots\dots + \omega^k) \\ & - A(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1} + \gamma^{k-1} + \delta^{k-1} + \dots + \omega^{k-1}) \\ & - B(\alpha^{k-2} + \beta^{k-2} + \gamma^{k-2} + \delta^{k-2} + \dots + \omega^{k-2}) \\ & - C(\alpha^{k-3} + \beta^{k-3} + \gamma^{k-3} + \delta^{k-3} + \dots + \omega^{k-3}) \\ & \quad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{aligned}$$
e

— H

$$-H(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\dots\dots+\omega^3)$$
$$-I(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\dots\dots+\omega^2)$$
$$-L(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\dots\dots+\omega),$$

e quindi ponendo Σx^k, Σx^{k-1}, Σx^{k-2}, ec. in luogo di queste somme, ne verrà

$$kM=-\Sigma x^k-A\Sigma x^{k-1}-B\Sigma x^{k-2}-C\Sigma x^{k-3}-\dots-H\Sigma x^3-I\Sigma x^2-L\Sigma x,$$ e finalmente

(F) $$\Sigma x^k+A\Sigma x^{k-1}+B\Sigma x^{k-2}+C\Sigma x^{k-3}+\dots+H\Sigma x^3+I\Sigma x^2+L\Sigma x+kM=0.$$ (*a*)

(*a*) Non voglio omettere d' esporre la seguente elegantissima dimostrazione del precedente Teorema. L' Autore di questa è il Ch. Avvocato Paolo Cassiani mio Predecessore, e Maestro, del quale i rari talenti, le profonde cognizioni, e l' ottimo carattere superano tutti gli encomii, che se ne possono fare.

Primo. Sia P il coefficiente di un termine qualunque Px^{m-k} dell' Equazione algebraica determinata $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+$ ec. $=0$. Se nel coefficiente medesimo si supporranno successivamente uguali allo zero tutte le radici α, β, γ, δ, ec., ω, ed i risultati di ciascheduna supposizione saranno rappresentati da' π', π'', π''', π^{IV}, ec., $\pi^{(\omega)}$, si avrà

$$\pi'+\pi''+\pi'''+\pi^{IV}+\dots+\pi^{(\omega)}=(m-k)P.$$

Qualsivoglia termine del coefficiente P espresso per mezzo delle radici dell' Equazione, non è che il prodotto di un numero k delle stesse radici: Ora questo prodotto deve necessariamente svanire, quando si suppongono successivamente uguali allo zero le k radici in esso contenute; e per l' opposto deve sussistere, quando si suppongono successivamente uguali allo zero le altre $m-k$ radici, le quali non entrano nella sua formazione. Dun-

35. Esprimendo $m - k$ l' esponente di un termine qualunque della (D), ed M il Coefficien-

e 2 te

---

que nella somma dei risultati $\pi' + \pi'' + \pi''' + \pi^{'\mathrm{v}} + \ldots + \pi^{(\omega)}$ ciaschedun termine del coefficiente P si troverà replicato $m - k$ volte, e conseguentemente sarà

$\pi' + \pi'' + \pi''' + \pi^{'\mathrm{v}} + \ldots + \pi^{(\omega)} = (m - k) \mathrm{P}$.

Secondo. In un' Equazione algebraica determinata qualunque $x^m + \mathrm{A} x^{m-1} + \mathrm{B} x^{m-2} + \ldots + \mathrm{P} x^{m-k} + \ldots + \mathrm{V} = 0$, si à $\Sigma x^k + \mathrm{A} \Sigma x^{k-1} + \mathrm{B} \Sigma x^{k-2} + \mathrm{C} \Sigma x^{k-3} + \ldots + k\mathrm{P} = 0$.

Supposto, che le radici dell' Equazione siano α, β, γ, δ, ec., ω, se si dividerà il primo membro per $x - \alpha$, si avrà la nuova Equazione $x^{m-1} + (\alpha + \mathrm{A}) x^{m-2} + (\alpha^2 + \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}) x^{m-3}$
$+ (\alpha^3 + \mathrm{A}\alpha^2 + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{C}) x^{m-4} + \ldots$
$+ (\alpha^k + \mathrm{A}\alpha^{k-1} + \mathrm{B}\alpha^{k-2} + \mathrm{C}\alpha^{k-3} + \ldots + \mathrm{P}) x^{m-(k+1)} +$
$\ldots + \alpha^{m-1} + \mathrm{A}\alpha^{m-2} + \mathrm{B}\alpha^{m-3} + \mathrm{C}\alpha^{m-4} + \ldots + \mathrm{T} = 0$,
la quale comprenderà tutte le radici β, γ, δ, ec., ω. E' poi facile il comprendere, che i valori dei coefficienti di questa nuova Equazione saranno affatto gli stessi, che quelli, a' cui si ridurrebbero i coefficienti A, B, C, ec., P della proposta per la supposizione di $\alpha = 0$. Si avrà dunque $\alpha^k + \mathrm{A}\alpha^{k-1} + \mathrm{B}\alpha^{k-2} + \mathrm{B}\alpha^{k-3} + \ldots + \mathrm{P} = \pi'$, e nella stessa maniera si troverà

$\beta^k + \mathrm{A}\beta^{k-1} + \mathrm{B}\beta^{k-2} + \mathrm{C}\beta^{k-3} + \ldots + \mathrm{P} = \pi''$,

$\gamma^k + \mathrm{A}\gamma^{k-1} + \mathrm{B}\gamma^{k-2} + \mathrm{C}\gamma^{k-3} + \ldots + \mathrm{P} = \pi'''$,

$\delta^k + \mathrm{A}\delta^{k-1} + \mathrm{B}\delta^{k-2} + \mathrm{C}\delta^{k-3} + \ldots + \mathrm{P} = \pi^{'\mathrm{v}}$, ec.,

$\omega^k + \mathrm{A}\omega^{k-1} + \mathrm{B}\omega^{k-2} + \mathrm{C}\omega^{k-3} + \ldots + \mathrm{P} = \pi^{(\omega)}$. Ora se si sommano tutte queste Equazioni, il numero delle quali è m, e si farà $\alpha^k + \beta^k + \gamma^k + \delta^k + \ldots + \omega^k = \Sigma x^k$, te, che gli corrisponde, se supporremo successivamente $k = 1, 2, 3$, ec., M diverrà in corrispondenza A, B, C, D, ec. (N. 17). Ora la precedente (F) con l' esponente generale k à per ultimo suo termine k M; dunque se supporremo successivamente $k = 1, 2, 3$, ec., la quantità k M divenendo A, 2 B, 3 C, ec., dalla (F) otterremo corrispondentemente le Equazioni

$$\Sigma x + A = 0,$$
$$\Sigma x^2 + A \Sigma x + 2 B = 0,$$
$$\Sigma x^3 + A \Sigma x^2 + B \Sigma x + 3 C = 0,$$
$$\Sigma x^4 + A \Sigma x^3 + B \Sigma x^2 + C \Sigma x + 4 D = 0,$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

Dalla prima di queste Equazioni ricavo

$$\Sigma x = - A.$$

Sostituisco questo valore nella seconda, e ne viene

$$\Sigma x^2 = A^2 - 2 B.$$

Ripongo i valori di Σx, e Σx^2 nella terza Equa-

$\alpha^{k-1} + \beta^{k-1} + \gamma^{k-1} + \delta^{k-1} + \ldots \omega^{k-1} = \Sigma x^{k-1}$,

$\alpha^{k-2} + \beta^{k-2} + \gamma^{k-2} + \delta^{k-2} + \ldots + \omega^{k-2} = \Sigma x^{k-2}$, ec.,

il risultato sarà $\Sigma x^k + A \Sigma x^{k-1} + B \Sigma x^{k-2} + C \Sigma x^{k-3} + \ldots$
$+ \omega P = \pi' + \pi'' + \pi''' + \pi^{IV} + \ldots + \pi^{(\omega)} = (m - k) P$ (n. prec.).
Dunque $\Sigma x^k + A \Sigma x^{k-1} + B \Sigma x^{k-2} + C \Sigma x^{k-3} + \ldots$
$+ m P = (m - k) P$, e quindi $\Sigma x^k + A \Sigma x^{k-1} + B \Sigma x^{k-2}$
$+ C \Sigma x^{k-3} + \ldots + k P = 0$.

Dello stesso Avvocato Cassiani è pur anche l' ingegnosissima dimostrazione del Teorema esposto nel (N. 52).

Equazione, e otterremo

$$\Sigma x^3 = -A^3 + 3AB - 3C.$$

In egual modo ricaveremo

$$\Sigma x^4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2B^2 - 4D,$$

e così in progresso. Dunque, data una qualunque Equazione Algebraica, potremo sempre col mezzo delle precedenti Equazioni determinare la somma delle potenze prime, seconde, terze, ec. delle radici, e ciò fino alle loro potenze *mesime*.

36. Che se si vogliono le somme delle potenze di un grado maggiore di m, non servendo in tal caso la (F), ricorreremo all' Equazione

(G) $\Sigma x^{m+b} + A\Sigma x^{m+b-1} + B\Sigma x^{m+b-2} + \text{ec.} + T\Sigma x^{b+1} + V\Sigma x^b = 0$, di cui imprendiamo ora a dimostrarne la verità.

Ponghansi successivamente nella data $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ec.} + Tx + V = 0$, in luogo della x tutte le radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ec; avremo perciò

$$\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + C\alpha^{m-3} + \text{ec.} + T\alpha + V = 0,$$
$$\beta^m + A\beta^{m-1} + B\beta^{m-2} + C\beta^{m-3} + \text{ec.} + T\beta + V = 0,$$
$$\gamma^m + A\gamma^{m-1} + B\gamma^{m-2} + C\gamma^{m-3} + \text{ec.} + T\gamma + V = 0,$$
$$\delta^m + A\delta^{m-1} + B\delta^{m-2} + C\delta^{m-3} + \text{ec.} + T\delta + V = 0,$$

ec. ec. ec. ec.

Moltiplico ora la prima di queste Equazioni per α^b, la seconda per β^b, la terza per γ^b, la quarta per δ^b, ec., e ciò fatto eseguisco in colonna la somma di tutti i risultati, che abbiamo così ottenuti; è chiaro che in fine ci risulterà appunto

(G) $\Sigma x^{m+b} + A\Sigma x^{m+b-1} + B\Sigma x^{m+b-2} + \text{ec.}$

+ T

$+ T \Sigma x^{b+1} + V \Sigma x^b = 0$.

Suppongo presentemente $b = 1$, avendosi quindi $\Sigma x^{m+1} + A \Sigma x^m + B \Sigma x^{m-1} + C \Sigma x^{m-2} +$ ec. $+ T \Sigma x^2 + V \Sigma x = 0$, sostituisco in luogo di Σx^m, Σx^{m-1}, ec. i valori rispettivi ottenuti pel (N. 35), e otterremo così il valore di Σx^{m+1}.

Faccio in secondo luogo $b = 2$, venendone $\Sigma x^{m+2} + A \Sigma x^{m+1} + B \Sigma x^m + C \Sigma x^{m-1} +$ ec. $+ T \Sigma x^3 + V \Sigma x^2 = 0$, colloco quivi in luogo di Σx^{m+1}, Σx^m, ec. i valori corrispondenti, e quindi ci risulterà il valore di Σx^{m+2}. In simil modo ricaveremo i valori di Σx^{m+3}, Σx^{m+4}, ec..

37. Le Equazioni ricavate nel (N. 35) della (F) col supporre successivamente $k = 1, 2, 3$, ec., m, e le altre ottenute dalla (G) (N.° prec.) col supporre successivamente $b = 1, 2, 3$, ec., Equazioni, mediante le quali possiamo sempre ottenere le somme di tutte le potenze intiere delle radici, quelle sono, che costituiscono i così detti dal loro Inventore *Teoremi Neutoniani*.

Data sia ad esempio l' Equazione $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$, col paragonare questa con la (D) ricavandosi $m = 3$, $A = -1$, $B = -14$, e l' ultimo termine $V = 24$, supponendo successivamente nella (F) $k = 1, 2, 3$, otterremo $\Sigma x - 1 = 0$, $\Sigma x^2 - \Sigma x - 28 = 0$, $\Sigma x^3 - \Sigma x^2 - 14 \Sigma x + 72 = 0$, e, supponendo nella (G) $b = 1, 2, 3$, ec., ne verrà $\Sigma x^4 - \Sigma x^3 - 14 \Sigma x^2 + 24 \Sigma x = 0$, $\Sigma x^5 - \Sigma x^4 - 14 \Sigma x^3 + 24 \Sigma x^2 = 0$, $\Sigma x^6 - \Sigma x^5 - 14 \Sigma x^4 + 24 \Sigma x^3 = 0$, ec.. Ricavo ora dalle prime di queste

ste Equazioni il valore di Σx, Σx^2, ec.; lo sostituisco nelle altre successive, e troveremo così $\Sigma x = 1$, $\Sigma x^2 = 29$, $\Sigma x^3 = -29$, $\Sigma x^4 = 353$, $\Sigma x^5 = -749$ ec. Difatti, essendo 2, 3, -4 le radici della supposta Equazione, abbiamo la loro somma $2 + 3 - 4 = 1$, la somma dei loro quadrati $4 + 9 + 16 = 29$, la somma dei loro cubi $8 + 27 - 64 = -29$, l' aggregato delle quarte potenze $16 + 81 + 256 = 353$, la somma delle potenze quinte $32 + 243 - 1024 = -749$, ec., come appunto avevam ritrovato coi Teoremi Neutoniani, indipendentemente dalle radici medesime.

38. Formare un' Equazione, la quale abbia per radici le m quantità date α, β, γ, $\delta \ldots\ldots \omega$.

Potremo sciogliere questo Problema in tre maniere diverse, mediante i (N.[i] 22, 31, 35). Imperciocchè pel (N.° 22) non avremo, che a moltiplicare insieme i binomii $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$, ec., ed uguagliare il loro prodotto allo zero; pel (N.° 31) non avremo, che a trovare i valori della somma semplice, della somma degli Ambi, di quella dei Terni, ec. delle date radici, e queste prese nel modo indicato nel (cit.° N.° 31) costituiranno i varii Coefficienti della Equazione che si cerca, il grado della quale sarà m. Finalmente dalle radici cognite potendosi immediatamente determinare la somma di tutte le loro potenze, potremo mediante queste, e le Equazioni del (N.° 35) determinare i Coefficienti dell' Equazione richiesta; poichè chiamati A, B, C, ec. tali

Coef-

Coefficienti, dalle $\Sigma x + A = 0$, $\Sigma x^2 + A \Sigma x + 2B = 0$, ec. ricaviamo

$$A = -\Sigma x,\ B = \frac{\Sigma x . \Sigma x - \Sigma x^2}{2},$$

$$C = \frac{3 \Sigma x . \Sigma x^2 - 2 \Sigma x^3 - (\Sigma x)^3}{2 . 3} \text{ec.}$$

Siano per esempio $1, 3, -2$ le radici date. Eseguisco secondo il primo metodo la Moltiplicazione dei binomii $x - 1$, $x - 3$, $x + 2$, e faccio il loro prodotto $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. Seguendo il secondo metodo formo la somma semplice $1 + 3 - 2 = 2$, quella degli Ambi $1 . 3 + 1 . -2 + 3 . -2 = 3 - 2 - 6 = -5$, e il prodotto $1 . 3 . -2 = -6$, e prendendo il primo, e l' ultimo di questi risultati col segno contrario, ne viene l' Equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. Finalmente col terzo metodo, avendosi $\Sigma x = 1 + 3 - 2 = 2$, $\Sigma x^2 = 1 + 9 + 4 = 14$, $\Sigma x^3 = 1 + 27 - 8 = 20$, otterremo $A = -2$, $B = \frac{2 . 2 - 14}{2} = \frac{-10}{2} = -5$,

$$C = \frac{3 . 2 . 14 - 2 . 20 - (2)^3}{2 . 3} = \frac{84 - 40 - 8}{2 . 3} = \frac{36}{6} = 6;$$

e quindi $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. In tutti e tre i casi abbiamo così ottenuta la stessa Equazione, di cui $1, 3, -2$ sono le radici.

39. Indichiamo con l' espressione $\Sigma x^m x^n$ la somma di tutti i prodotti, che si ànno moltiplicando la potenza *nesima* di ciascuna radice con la somma di tutte le potenze *mesime* dell' altre, onde sia $\Sigma x^m x^n = \alpha^n (\beta^m + \gamma^m + \delta^m + \text{ec.})$

$+ \beta^n$

$$+ \beta^n (\alpha^m + \gamma^m + \delta^m + \text{ec.})$$
$$+ \gamma^n (\alpha^m + \beta^m + \delta^m + \text{ec.})$$
$$+ \delta^n (\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \text{ec.})$$

ec. ec. ec., ovvero

$$\Sigma x^m x^n = \alpha^n \beta^m + \alpha^n \gamma^m + \alpha^n \delta^m + \text{ec.}$$
$$+ \beta^n \alpha^m + \beta^n \gamma^m + \beta^n \delta^m + \text{ec.}$$
$$+ \gamma^n \alpha^m + \gamma^n \beta^m + \gamma^n \delta^m + \text{ec.}$$
$$+ \delta^n \alpha^m + \delta^n \beta^m + \delta^n \gamma^m + \text{ec.}$$

ec. ec. ec.

L' espressione $\Sigma x^m x^n x^p$ indichi l' aggregato de' prodotti della potenza p di ciacuna radice nella somma de' prodotti fra le potenze m, n delle altre, e sia

$$\Sigma x^m x^n x^p = \alpha^p (\beta^m \gamma^n + \beta^n \gamma^m + \beta^m \delta^n + \beta^n \delta^m + \gamma^n \delta^m + \gamma^m \delta^n + \text{ec.})$$
$$+ \beta^p (\alpha^m \gamma^n + \alpha^n \gamma^m + \alpha^m \delta^n + \alpha^n \delta^m + \gamma^n \delta^m + \gamma^m \delta^n + \text{ec.})$$
$$+ \gamma^p (\alpha^m \beta^n + \alpha^n \beta^m + \alpha^m \delta^n + \alpha^n \delta^m + \beta^n \delta^m + \beta^m \delta^n + \text{ec.})$$
$$+ \delta^p (\alpha^m \beta^n + \alpha^n \beta^m + \alpha^m \gamma^n + \alpha^n \gamma^m + \beta^n \gamma^m + \beta^m \gamma^n + \text{ec.}),$$

ec. ec. ec. ossia

$$\Sigma x^m x^n x^p = \alpha^p \beta^m \gamma^n + \alpha^p \beta^n \gamma^m + \alpha^p \beta^m \delta^n + \alpha^p \beta^n \delta^m + \alpha^p \gamma^n \delta^m + \alpha^p \gamma^m \delta^n + \text{ec.}$$
$$+ \beta^p \alpha^m \gamma^n + \beta^p \alpha^n \gamma^m + \beta^p + \alpha^m \delta^n + \beta^p \alpha^n \delta^m + \beta^p \gamma^n \delta^m + \beta^p \alpha^n \delta^m + \text{ec.}$$
$$+ \gamma^p \alpha^m \beta^n + \gamma^p \alpha^n \beta^m \gamma^p + \alpha^m \delta^n + \gamma^p \alpha^n \delta^m + \beta^n \delta^m \gamma^p + \gamma^p \beta^m \delta^n + \text{ec.}$$
$$+ \delta^p \alpha^m \beta^n + \delta^p \alpha^n \beta^m + \delta^p \alpha^m \gamma^n + \delta^p \alpha^n \gamma^m + \beta^n \gamma^m \delta^p + \delta^p \beta^m \gamma^n + \text{ec.}$$

ec. ec. ec.

 Nel-

Nella maniera medesima supponghiamo

$$\Sigma x^{m} x^{n} x^{p} x^{q} = \alpha^{q} (\beta^{m} \gamma^{n} \delta^{p} + \beta^{n} \gamma^{m} \delta^{p} + \text{ec.})$$
$$+ \beta^{q} (\alpha^{m} \gamma^{n} \delta^{p} + \alpha^{n} \gamma^{m} \delta^{p} + \text{ec.})$$
$$+ \gamma^{q} (\alpha^{m} \beta^{n} \delta^{p} + \alpha^{n} \beta^{m} \delta^{p} + \text{ec.})$$
$$+ \delta^{q} (\alpha^{m} \beta^{n} \gamma^{p} + \alpha^{n} \beta^{m} \gamma^{p} + \text{ec.})$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

e così di seguito.

40. Dal (N. prec.), e dal (N.° 8) è chiaro, che sarà

$$\Sigma x^{m} x^{n} = \alpha^{n} \Sigma x^{m\overset{\alpha}{-}} + \beta^{n} \Sigma x^{m\overset{\beta}{-}} + \gamma^{n} \Sigma x^{m\overset{\gamma}{-}}$$
$$+ \delta^{n} \Sigma x^{m\overset{\delta}{-}} + \text{ec.},$$

$$\Sigma x^{m} x^{n} x^{p} = \alpha^{p} \Sigma x^{m} x^{n\overset{\alpha}{-}} + \beta^{p} \Sigma x^{m} x^{n\overset{\beta}{-}}$$
$$+ \gamma^{p} \Sigma x^{m} x^{n\overset{\gamma}{-}} + \delta^{p} \Sigma x^{m} x^{n\overset{\delta}{-}} + \text{ec.},$$

$$\Sigma x^{m} x^{n} x^{p} x^{q} = \alpha^{q} \Sigma x^{m} x^{n} x^{p\overset{\alpha}{-}} + \beta^{q} \Sigma x^{m} x^{n} x^{p\overset{\beta}{-}}$$
$$+ \gamma^{q} \Sigma x^{m} x^{n} x^{p\overset{\gamma}{-}} + \delta^{q} \Sigma x^{m} x^{n} x^{p\overset{\delta}{-}} + \text{ec.},$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

41. Avremo sempre

(H) $\Sigma x^{m} x^{n} = \Sigma x^{n} \Sigma x^{m} - \Sigma x^{m+n},$

(I) $\Sigma x^{m} x^{n} x^{p} = \Sigma x^{p} \Sigma x^{m} x^{n} - \Sigma x^{m} x^{n+p} - \Sigma x^{n} x^{m+p},$

(K) $\Sigma x^{m} x^{n} x^{p} x^{q} = \Sigma x^{q} \Sigma x^{m} x^{n} x^{p} - \Sigma x^{m} x^{n} x^{p+q}$
$- \Sigma x^{m} x^{p} x^{n+q} - \Sigma x^{n} x^{p} x^{m+q},$

e in generale

(L) $\Sigma x^{m} x^{n} x^{p} x^{q} \ldots x^{u} = \Sigma x^{u} \Sigma x^{m} x^{n} x^{p} x^{q} \ldots\ldots$
$- \Sigma x^{m}$

$$-\Sigma x^{m} x^{n} x^{p} \ldots x^{q+u} - \Sigma x^{m} x^{n} x^{q} \ldots x^{p+u}$$
$$-\Sigma x^{m} x^{p} x^{q} \ldots x^{n+u} - \Sigma x^{n} x^{p} x^{q} \ldots x^{m+u}$$
ec. ec. ec.

1.° Poichè abbiamo

$\Sigma x^{m} = \alpha^{m} + \Sigma x^{m\overset{\alpha}{-}}$ (N. 9, 34) moltiplicando per α^{n} ne verrà $\alpha^{n} \Sigma x^{m} = \alpha^{m+n} + \alpha^{n} \Sigma x^{m\overset{\alpha}{-}}$.

In egual modo troveremo essere

$$\beta^{n} \Sigma x^{m} = \beta^{m+n} + \beta^{n} \Sigma x^{m\overset{\beta}{-}}$$
$$\gamma^{n} \Sigma x^{m} = \gamma^{m+n} + \gamma^{n} \Sigma x^{m\overset{\gamma}{-}}$$
$$\delta^{n} \Sigma x^{m} = \delta^{m+n} + \delta^{n} \Sigma x^{m\overset{\delta}{-}}$$
ec. ec. ec.

Dunque sommando in colonna tutte queste Equazioni, ci risulterà

$$(\alpha^{n} + \beta^{n} + \gamma^{n} + \delta^{n} + \text{ec.}) \Sigma x^{m} = \alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \gamma^{m+n} + \delta^{m+n} + \text{ec.}$$
$$+ \alpha^{n} \Sigma x^{m\overset{\alpha}{-}} + \beta^{n} \Sigma x^{m\overset{\beta}{-}} + \gamma^{n} \Sigma x^{m\overset{\gamma}{-}} + \delta^{n} \Sigma x^{m\overset{\delta}{-}} + \text{ec.},$$

e ponendo le rispettive espressioni, otterremo $\Sigma x^{n} \Sigma x^{m} = \Sigma x^{m+n} + \Sigma x^{m} x^{n}$ (N. 34, 40), e quindi

(H) $\Sigma x^{m} x^{n} = \Sigma x^{n} \Sigma x^{m} - \Sigma x^{m+n}$.

2.° Essendo $\Sigma x^{m} x^{n} = \alpha \,|\, \Sigma x^{m} x^{n} + \Sigma x^{m} x^{n\overset{\alpha}{-}}$ (N. 9), e come si vede nel (N. 39) dalla pri-

 ma

ma fila orizzontale, e dalla prima colonna del valore di $\Sigma x^m x^n$, essendo $\alpha \,|\, \Sigma x^m x^n = \alpha^n \Sigma x^{m}{}^{\overset{\alpha}{-}}$ $+ \alpha^m \Sigma x^{n}{}^{\overset{\alpha}{-}}$; ne viene che avremo $\Sigma x^m x^n$ $= \alpha^n \Sigma x^{m}{}^{\overset{\alpha}{-}} + \alpha^m \Sigma x^{n}{}^{\overset{\alpha}{-}} + \Sigma x^m x^{n}{}^{\overset{\alpha}{-}}$, e in egual modo, cangiata semplicemente la α in β, γ, δ, ec., trovasi essere

$$\Sigma x^m x^n = \beta^n \Sigma x^{m}{}^{\overset{\beta}{-}} + \beta^m \Sigma x^{n}{}^{\overset{\beta}{-}} + \Sigma x^m x^{n}{}^{\overset{\beta}{-}},$$

$$\Sigma x^m x^n = \gamma^n \Sigma x^{m}{}^{\overset{\gamma}{-}} + \gamma^m \Sigma x^{n}{}^{\overset{\gamma}{-}} + \Sigma x^m x^{n}{}^{\overset{\gamma}{-}},$$

$$\Sigma x^m x^n = \delta^n \Sigma x^{m}{}^{\overset{\delta}{-}} + \delta^m \Sigma x^{m}{}^{\overset{\delta}{-}} + \Sigma x^m x^{n}{}^{\overset{\delta}{-}},$$

ec. ec. ec.

Moltiplico presentemente queste Equazioni rispettivamente per α^p, β^p, γ^p, δ^p, ec., e venendone

$$\alpha^p \Sigma x^m x^n = \alpha^{n+p} \Sigma x^{m}{}^{\overset{\alpha}{-}} + \alpha^{m+p} \Sigma x^{n}{}^{\overset{\alpha}{-}}$$
$$+ \alpha^p \Sigma x^m x^{n}{}^{\overset{\alpha}{-}},$$

$$\beta^p \Sigma x^m x^n = \beta^{n+p} \Sigma x^{m}{}^{\overset{\beta}{-}} + \beta^{m+p} \Sigma x^{n}{}^{\overset{\beta}{-}}$$
$$+ \beta^p \Sigma x^m x^{n}{}^{\overset{\beta}{-}},$$

$$\gamma^p \Sigma x^m x^n = \gamma^{n+p} \Sigma x^{m}{}^{\overset{\gamma}{-}} + \gamma^{m+p} \Sigma x^{n}{}^{\overset{\gamma}{-}}$$
$$+ \gamma^p \Sigma x^m x^{n}{}^{\overset{\gamma}{-}},$$

$$\delta^p \Sigma x^m x^n = \delta^{n+p} \Sigma x^{m}{}^{\overset{\delta}{-}} + \delta^{m+p} \Sigma x^{n}{}^{\overset{\delta}{-}}$$
$$+ \delta^p \Sigma x^m x^{n}{}^{\overset{\delta}{-}},$$

ec. ec. ec.

som-

sommo in colonna tutti questi risultati. Ora la somma della prima colonna è $= \Sigma\, x^p\, \Sigma\, x^m x^n$, quella della seconda pel (N. 40) è $= \Sigma\, x^m x^{n+p}$, quella della terza $= \Sigma\, x^n x^{m+p}$, e quella della quarta è $= \Sigma\, x^m x^n x^p$. Dunque eseguita l' operazione otterremo $\Sigma\, x^p\, \Sigma\, x^m x^n = \Sigma\, x^m x^{n+p} + \Sigma\, x^n x^{m+p} + \Sigma\, x^m x^n x^p$, e però

(I) $\Sigma\, x^m x^n x^p = \Sigma\, x^p\, \Sigma\, x^m x^p - \Sigma\, x^m x^{n+p} - \Sigma\, x^n x^{m+p}$.

3.° Avendosi $\Sigma\, x^m x^n x^p = \alpha \,|\, \Sigma\, x^m x^n x^p + \Sigma\, x^m x^n x^{p\overset{\alpha}{\overline{\;\;}}}$ (N. 9), e dal (N. 39) vedendosi essere $\alpha \,|\, \Sigma\, x^m x^n x^p = \alpha^p\, \Sigma\, x^m x^{n\overset{\alpha}{\overline{\;\;}}} + \alpha^n\, \Sigma\, x^m x^{p\overset{\alpha}{\overline{\;\;}}} + \alpha^m\, \Sigma\, x^n x^{p\overset{\alpha}{\overline{\;\;}}}$, ne segue che sarà $\Sigma\, x^m x^n x^p = \alpha^p\, \Sigma\, x^m x^{n\overset{\alpha}{\overline{\;\;}}} + \alpha^n\, \Sigma\, x^m x^{p\overset{\alpha}{\overline{\;\;}}} + \alpha^m\, \Sigma\, x^n x^{p\overset{\alpha}{\overline{\;\;}}} + \Sigma\, x^m x^n x^{p\overset{\alpha}{\overline{\;\;}}}$, e cangiata la α in β, γ, δ, ec., avremo egualmente

$$\Sigma\, x^m x^n x^p = \beta^p\, \Sigma\, x^m x^{n\overset{\beta}{\overline{\;\;}}} + \beta^n\, \Sigma\, x^m x^{p\overset{\beta}{\overline{\;\;}}} + \beta^m\, \Sigma\, x^n x^{p\overset{\beta}{\overline{\;\;}}} + \Sigma\, x^m x^n x^{p\overset{\beta}{\overline{\;\;}}},$$

$$\Sigma\, x^m x^n x^p = \gamma^p\, \Sigma\, x^m x^{n\overset{\gamma}{\overline{\;\;}}} + \gamma^n\, \Sigma\, x^m x^{p\overset{\gamma}{\overline{\;\;}}} + \gamma^m\, \Sigma\, x^n x^{p\overset{\gamma}{\overline{\;\;}}} + \Sigma\, x^m x^n x^{p\overset{\gamma}{\overline{\;\;}}},$$

$$\Sigma\, x^m x^n x^p = \delta^p\, \Sigma\, x^m x^{n\overset{\delta}{\overline{\;\;}}} + \delta^n\, \Sigma\, x^m x^{p\overset{\delta}{\overline{\;\;}}} + \delta^m\, \Sigma\, x^n x^{p\overset{\delta}{\overline{\;\;}}} + \Sigma\, x^m x^n x^{p\overset{\delta}{\overline{\;\;}}},$$

ec. ec.

Mol-

Moltiplico, come precedentemente, per α^q, β^q, γ^q, δ^q, ec. queste successive Equazioni, ed avutine i risultati

$$\alpha^q \Sigma x^m x^n x^p = \alpha^{p+q} \Sigma x^m x^n \overset{\alpha}{\overline{\quad}} + \alpha^{n+q} \Sigma x^m x^p \overset{\alpha}{\overline{\quad}}$$
$$+ \alpha^{m+q} \Sigma x^n x^p \overset{\alpha}{\overline{\quad}} + \alpha^q \Sigma x^m x^n x^p \overset{\alpha}{\overline{\quad}},$$
$$\beta^q \Sigma x^m x^n x^p = \beta^{p+q} \Sigma x^m x^n \overset{\beta}{\overline{\quad}} + \beta^{n+q} \Sigma x^m x^p \overset{\beta}{\overline{\quad}}$$
$$+ \beta^{m+q} \Sigma x^n x^p \overset{\beta}{\overline{\quad}} + \beta^q \Sigma x^m x^n x^p \overset{\beta}{\overline{\quad}},$$
$$\gamma^q \Sigma x^m x^n x^p = \gamma^{p+q} \Sigma x^m x^n \overset{\gamma}{\overline{\quad}} + \gamma^{n+q} \Sigma x^m x^p \overset{\gamma}{\overline{\quad}}$$
$$+ \gamma^{m+q} \Sigma x^n x^p \overset{\gamma}{\overline{\quad}} + \gamma^q \Sigma x^m x^n x^p \overset{\gamma}{\overline{\quad}},$$
$$\delta^q \Sigma x^m x^n x^p = \delta^{p+q} \Sigma x^m x^n \overset{\delta}{\overline{\quad}} + \delta^{n+q} \Sigma x^m x^p \overset{\delta}{\overline{\quad}}$$
$$+ \delta^{m+q} \Sigma x^n x^p \overset{\delta}{\overline{\quad}} + \delta^q \Sigma x^m x^n x^p \overset{\delta}{\overline{\quad}},$$
$$\text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}$$

li sommo in colonna, ed è chiaro, che, come nell' altro caso, ci risulterà pel (N. 40)

$$\Sigma x^q \Sigma x^m x^n x^p = \Sigma x^m x^n x^{p+q} + \Sigma x^m x^p x^{n+q}$$
$$+ \Sigma x^n x^p x^{m+q} + \Sigma x^m x^n x^p x^q,$$

onde ricaveremo

$$(\mathrm{K})\ \Sigma x^m x^n x^p x^q = \Sigma x^q \Sigma x^m x^n x^p - \Sigma x^m x^n x^{p+q}$$
$$- \Sigma x^m x^p x^{n+q} - \Sigma x^n x^p x^{m+q}.$$

4.° Ripetendo gl' istessi discorsi, facilmente vedremo verificarsi sempre proprietà simili alle precedenti rapporto alle somme dei prodotti fra le varie potenze delle radici, qualunque queste siansi, e qualunque si sia il loro numero, onde in ge-

generale avremo

(L) $\Sigma x^m x^n x^p x^q \ldots\ldots x^u = \Sigma x^u . \Sigma x^m x^n x^p x^q \ldots\ldots$
$- \Sigma x^m x^n x^p \ldots x^{q+u} - \Sigma x^m x^n x^q \ldots\ldots x^{p+u}$
$- \Sigma x^m x^p x^q \ldots x^{n+u} - \Sigma x^n x^p x^q \ldots\ldots x^{m+u}$
ec. ec. ec.

43. Col mezzo delle precedenti formole (H), (I), (K), (L), data un' Equazione qualunque, potremo sempre determinare le somme dei prodotti di qualsivogliano potenze delle sue radici. La formola (H) ci darà la somma dei prodotti fra due sole potenze, la formola (I) ci darà la somma dei prodottti fra tre potenze, e così di seguito.

Venga proposta per esempio l' Equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, e vogliasi l' aggregato di tutti i prodotti fra le potenze seconda, e terza delle sue radici. Supposto nella (H) $m = 2$, $n = 3$, venendone $\Sigma x^2 x^3 = \Sigma x^2 \Sigma x^3 - \Sigma x^5$, e dalle (F), (G) ricavandosi $\Sigma x^2 = 14$, $\Sigma x^3 = 20$, $\Sigma x^5 = 212$, otterremo $\Sigma x^2 x^3 = 14.20 - 212$ $= 280 - 212 = 68$ per la somma richiesta. Venga in secondo luogo domandata la somma di tutti i prodotti fra le potenze prima, seconda, e quarta delle radici medesime. Suppongo perciò nella (I) $m = 1$, $n = 2$, $p = 4$, e da essa ottenendo $\Sigma x^1 x^2 x^4 = \Sigma x^4 \Sigma x^1 x^2 - \Sigma x^1 x^6 - \Sigma x^2 x^5$, ritrovo col mezzo della (H) i valori delle quantità $\Sigma x^1 x^2 = 8$, $\Sigma x^1 x^6 = -472$, $\Sigma x^2 x^5 = 908$, ed abbiamo $\Sigma x^4 = 98$. Dunque sostituendo avremo $\Sigma x^1 x^2 x^4 = 98.8 + 472 - 908$, e però

Σx^1

$\Sigma\, x^1\, x^2\, x^4 = 348$. Difatti essendo 1, 3, -2 le radici della proposta (N.° 38), è facile il verificare da esse medesime i ritrovati valori delle somme proposteci $\Sigma\, x^2\, x^3$, $\Sigma\, x^1\, x^2\, x^4$.

43. Data una funzione, per esempio la $f(\alpha)(\beta)(\gamma)$, supponghiamo di cambiare in essa fra loro le lettere, che la compongono, scrivendo per esempio la α in luogo della β, e la β invece della α, come nella $f(\beta)(\alpha)(\gamma)$, o siccome nell' altra $f(\beta)(\gamma)(\alpha)$, ponendo la α in luogo di γ, la β in luogo di α, e la γ in vece di β. Questi diversi collocamenti delle lettere, e quindi i varii risultati, che ottengonsi nella funzione, quelli sono, che dai Matematici si dicono *Permutazioni*.

44. Se sia $f(\alpha)(\beta)(\gamma) = \alpha\beta\gamma$, al cangiarsi fra loro delle lettere, non cambiando mai il valore del prodotto, vedesi che in questo caso, qualunque permutazione si faccia, il valore della funzione resta sempre il medesimo; ma se abbiasi $f(\alpha)(\beta)(\gamma) = \alpha + \beta - \gamma$, oppure $f(\alpha)(\beta)(\gamma) = \frac{\alpha}{\beta} + \gamma^2$, nel primo di questi casi, la funzione non cambia valore per la permutazione di α in β, ma lo cambia bensì nella permutazione di α, o di β in γ; nell' altro caso poi il valore della funzione diviene sempre diverso, qualunque permutazione si faccia, donde si vede, che una data funzione sotto le varie permutazioni o non cambia mai di valore, o lo cambia sempre, o alcune volte soltanto.

45. Proposta una funzione qualunque di un numero m di lettere, determinare il numero di tutte le sue possibili permutazioni.

Sia primieramente $m = 1$, e $f(\alpha)$ la data funzione, in questo caso non potendosi dare, che una sola posizione alla α, non vi sarà, che una sola permutazione.

2.° Abbiasi $m = 2$, e $f(\alpha)(\beta)$ la funzione proposta; in tale supposizione potremo scrivere la β, o dopo, o prima della α, ed anzi non potremo attribuirle altro collocamento; due adunque ne saranno i risultati, cioè $f(\alpha)(\beta)$, $f(\beta)(\alpha)$, e in numero di $2 = 2 . 1$ per conseguenza le permutazioni richieste.

3.° Supposto $m = 3$, aggiungasi nella data funzione alle due precedenti α, β la terza lettera γ. Questa, qualunque collocamento abbiansi le α, β, può sempre avere tre posizioni diverse, poichè può scriversi, e dopo, e in mezzo, e prima di esse; ora pel (prec. 2.°) due sono i cangiamenti fra le α, e β, a ciascuno dunque di questi, tre corrispondendone di γ, ne viene, che $3 . 2 = 3 . 2 . 1 = 6$, sarà il numero delle permutazioni nella proposta funzione, e tali saranno le

$f(\alpha)(\beta)(\gamma)$, $f(\alpha)(\gamma)(\beta)$, $f(\gamma)(\alpha)(\beta)$,
$f(\beta)(\alpha)(\gamma)$, $f(\beta)(\gamma)(\alpha)$, $f(\gamma)(\beta)(\alpha)$.

4.° Essendo $m = 4$, alle α, β, γ della precedente funzione uniscasi la δ; poichè sotto qualsivoglia posizione delle α, β, γ può la δ evidentemente occupare quattro luoghi diversi, ne segue,

 che

che le permutazioni della $f(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)$ saranno quattro volte tante, quante sono le permutazioni fra le tre quantità α, β, γ, e quindi saranno in Numero di $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

5.° Se $f(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)(\eta)$ sia la funzione proposta, troveremo in egual modo $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ essere il numero delle sue permutazioni, e così di seguito; onde in generale

6.° Le permutazioni fra m lettere dovendo essere m volte tante, quante sono le permutazioni fra $m-1$ quantità; il numero delle permutazioni tra queste $m-1$ quantità dovendo essere $= m-1$ replicato tante volte, quante sono le permutazioni fra $m-2$ delle medesime; il numero di queste permutazioni ultime uguagliando $m-2$ moltiplicato pel Numero delle permutazioni fra $m-3$ di tali lettere, e così in progresso; ne risulta chiaramente, che il Numero delle permutazioni fra le m supposte quantità dovrà essere
$= m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$, ossia $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots m$.

46. Supponghiamo nelle formole del (N.° 39) $m = n$; per tale ipotesi i due termini $\alpha^m \beta^n + \alpha^n \beta^m$ si cangeranno nel solo $2\alpha^m \beta^m$, e così gli altri tutti
$\alpha^m \gamma^n + \alpha^n \gamma^m$, $\beta^m \gamma^n + \beta^n \gamma^m$, ec.,
$\alpha^m \beta^n \gamma^p + \alpha^n \beta^m \gamma^p$, $\alpha^m \gamma^n \beta^p + \alpha^n \gamma^m \beta^p$, ec.
si cambieranno nei corrispondenti
$2\alpha^m \gamma^m$, $2\beta^m \gamma^m$, $2\alpha^m \beta^m \gamma^p$, $2\alpha^m \gamma^m \beta^p$, ec..

Dunque se supporremo, che la espressione $\Sigma \overline{x\, x}^m$

ci

ci rappresenti la somma $\alpha^m\beta^m+\alpha^m\gamma^m+\beta^m\gamma^m+$ ec., è chiaro, che ne verrà $2\,\Sigma\,\overline{x\,x}^{\,m} = \Sigma\,x^m\,x^n$. In egual modo, se le espressioni $\Sigma\,\overline{x\,x}^{\,m}\,x^p$, $\Sigma\,\overline{x\,x}^{\,m}\,x^p\,x^q$ + ec. ci significano le somme $\alpha^m\,\beta^m\,\gamma^p+\alpha^m\,\gamma^m\,\beta^p+\beta^m\gamma^m\alpha^p+$ ec., $\alpha^m\,\beta^m\,\gamma^p\,\delta^q+\alpha^m\,\gamma^m\,\beta^p\,\delta^q+\alpha^m\,\delta^m\,\beta^p\,\gamma^q+\beta^m\,\gamma^m\,\alpha^p\,\delta^q+$ ec., avremo

$$\Sigma\,x^m\,x^n\,x^p = 2\,\Sigma\,\overline{x\,x}^{\,m}\,x^p,\ \Sigma\,x^m\,x^n\,x^p\,x^q = 2\,\Sigma\,\overline{x\,x}^{\,m}\,x^p\,x^q,\ \text{ec.}$$

2.° Facciamo $m=n=p$. Poichè nel valore di $\Sigma\,x^m\,x^n\,x^p$ i termini, ove entrano insieme le tre radici α, β, γ sono tanti evidentemente, quante sono le permutazioni fra gli esponenti m, n, p (N.° 39), onde sono in numero di $1.2.3$ (3.° N.° 45), e poichè per la nostra supposizione ciascuno di questi termini si cangia nel $\alpha^m\beta^m\gamma^m$; ne segue chiaramente, che nella quantità $\Sigma x^m\,x^n\,x^p$ il termine $\alpha^m\beta^m\gamma^m$ verrà ad essere ripetuto le volte $1.2.3$; ora lo stesso dicesi pure degl' altri termini tutti; dunque divenendo ciascuno di essi un termine simile al precedente, e venendo perciò ad essere replicato le volte $1.2.3$, ne risulta, che se esprimeremo per $\Sigma\,\overline{x\,x\,x}^{\,m}$ la somma $\alpha^m\,\beta^m\,\gamma^m+\alpha^m\beta^m\delta^m+\alpha^m\gamma^m\delta^m+\beta^m\,\gamma^m\delta^m+$ ec., dovrà essere $\Sigma\,x^m\,x^n\,x^p = 1.2.3\,\Sigma\,\overline{x\,x\,x}^{\,m}$. Con lo stesso discorso vedremo essere $\Sigma\,x^m\,x^n\,x^p\,x^q = 1.2.3\,\Sigma\,\overline{x\,x\,x}^{\,m}\,x^q$, $\Sigma\,x^m\,x^n\,x^p\,x^q\,x^r = 1.2.3\,\Sigma\,\overline{x\,x\,x}^{\,m}\,x^q\,x^r$, ec.

3.°

3.° Abbiasi $m = n = p = q$. Essendo in $\Sigma\, x^m x^n x^p x^q$ tanti i termini, ne' quali entrano insieme le radici α, β, γ, δ, quanto è il numero delle permutazioni fra le quantità m, n, p, q, vedesi che nell' ipotesi fatta, divenendo ciascuno di tali termini $= \alpha^m \beta^m \gamma^m \delta^m$, verrà questo termine ad essere ripetuto le volte $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, e lo stesso accadendo degli altri, se sia $\Sigma\, \overline{x\, x\, x\, x}^{\,m}$ $= \alpha^m \beta^m \gamma^m \delta^m + \alpha^m \beta^m \gamma^m \eta^m +$ ec., avremo $\Sigma\, x^m x^n x^p x^q = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, \Sigma\, \overline{x\, x\, x\, x}^{\,m}$, e così troveremo essere $\Sigma\, x^m x^n x^p x^q x^r = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ $\Sigma\, \overline{x\, x\, x\, x \quad x^r}^{\,m}$, ec.

4.° Ripetendo il discorso medesimo si vedrà agevolmente, che mentre sia $m = n = p = q = r$, otterremo $\Sigma\, x^m x^n x^p x^q x^r = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5\, \Sigma\, \overline{x\, x\, x\, x\, x}^{\,m}$, e così in progresso.

47. Supponghiamo in (H) $m = n$, riponendo in luogo di $\Sigma\, x^m x^n$ la quantità $2\, \Sigma\, \overline{x\, x}^{\,m}$ (1.° N.° 46), ci verrà $2\, \Sigma\, \overline{x\, x}^{\,m} = \Sigma\, x^m\, \Sigma\, x^m - \Sigma\, x^{2m}$, e però $\Sigma\, \overline{x\, x}^{\,m} = \dfrac{\Sigma\, x^m\, \Sigma\, x^m - \Sigma\, x^{2m}}{2}$.

2.° Ponghiamo in (I) $m = n = p$; pei (N.[i] 2.° 41, 1.°, 2.° 46) sostituendo ci verrà

$1 \cdot 2 \cdot 3\, \Sigma\, \overline{x\, x\, x}^{\,m} = 2\, \Sigma\, x^m\, \Sigma\, \overline{x\, x}^{\,m} - \Sigma\, x^m x^{2m}$

$- \Sigma\, x^m x^{2m} = 2\, \Sigma\, x^m\, \Sigma\, \overline{x\, x}^{\,m} - 2\, \Sigma\, x^m x^{2m}$, e quindi di $\Sigma \overline{x\,x\,x}^{\,m} = \frac{\Sigma x^m \, \Sigma \overline{x\,x}^{\,m} - \Sigma x^m x^{2m}}{3}$.

3.° Facciasi in (K) $m = n = p = q$; colla sostituzione, pei (N.i 3.° 41., 1.°, 2.°, 3.° 46.   ) avremo $1 . 2 . 3 . 4 \, \Sigma \overline{x\,x\,x\,x}^{\,m} = 1 . 2 . 3 \, \Sigma x^m \, \Sigma \overline{x\,x\,x}^{\,m}$ $- 1 . 2 . 3 \, \Sigma \overline{x\,x}^{\,m} \, x^{2m}$, e però $\Sigma \overline{x\,x\,x\,x}^{\,m}$ $= \frac{\Sigma x^m \, \Sigma \overline{x\,x\,x}^{\,m} - \Sigma \overline{x\,x}^{\,m} \, x^{2m}}{4}$.

4.° In eguale maniera, allorchè $m = n = p = q = r$, troveremo pei (N.i 4.° 41., 2.°, 3.° 4.° 46) essere $\Sigma \overline{x\,x\,x\,x\,x}^{\,m} = \frac{\Sigma x^m \, \Sigma \overline{x\,x\,x\,x}^{\,m} - \Sigma \overline{x\,x\,x}^{\,m} \, x^{2m}}{5}$, e così di seguito.

48. Data un' Equazione Algebraica determinata, per esempio la $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ (N.° 42), potremo sempre dedurre da' suoi Coefficienti il valor delle somme $\Sigma \overline{x\,x}^{\,m}$, $\Sigma \overline{x\,x\,x}^{\,m}$, ec., servendoci delle formole precedenti. Facciasi per esempio $m = 2$, ne verrà $\Sigma \overline{x\,x}^{\,2} = \frac{\Sigma x^2 \, \Sigma x^2 - \Sigma x^4}{2}$, $\Sigma \overline{x\,x\,x}^{\,2}$ $= \frac{\Sigma x^2 \, \Sigma \overline{x\,x}^{\,2} - \Sigma x^2 \, x^4}{3}$, ec., e però dalla posta Equazione avendosi per le (F), (G), (H) $\Sigma x^2 = 14$, $\Sigma x^4 = 98$, $\Sigma x^2 x^4 = \Sigma x^2 \, \Sigma x^4 - \Sigma x^6$ $= 14 \times 98 - 794 = 578$, otterremo rapporto ad essa $\Sigma \overline{x\,x}^{\,2} = \frac{14 \times 14 - 98}{2} = 49$; $\Sigma \overline{x\,x\,x}^{\,2}$ $= 14$

$= \frac{14 \times 49 - 578}{3} = 36.$

49. Quale sarà il valore della quantità $\Sigma x^{-k} = \alpha^{-k} + \beta^{-k} + \gamma^{-k} + \delta^{-k} +$ ec. $= \frac{1}{\alpha^k} + \frac{1}{\beta^k} + \frac{1}{\gamma^k} + \frac{1}{\delta^k} +$ ec.? Col ridurre tutte queste frazioni allo stesso denominatore, poichè si ottiene $\Sigma x^{-k} = \left(\frac{\beta^k \gamma^k \delta^k \ldots + \alpha^k \gamma^k \delta^k \ldots + \alpha^k \beta^k \delta^k \ldots + \alpha^k \beta^k \gamma^k \ldots + ec.}{\alpha^k \beta^k \gamma^k \delta^k \ldots} \right)$, se sia V l' ultimo termine dell' Equazione data, ed m il suo grado, avremo $\Sigma x^{-k} = \frac{\Sigma \overline{xxx\ldots}^k}{(\pm V)^k}$, comprendendosi sotto la Σ nel Numeratore un numero $m - 1$ di x, e anteponendo alla V il segno superiore, se m è pari, e l' inferiore, se m è dispari. Ora mediante il (N.° 47) trovo il valore di $\Sigma \overline{x x x \ldots}^k$, dividendo questo adunque per $(\pm V)^k$, tostamente ricavo il valore di Σx^{-k}.

CA-

CAPO TERZO.

Altre Proprietà Generali delle Equazioni.

50. Supposto $Y = x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3}$ $+$ ec. $= f(x)$, e dato un valore alla x, se supporremo che questo vada aumentandosi continuatamente, ovvero si accresca di una quantità infinitamente piccola; anche la Y si varierà in corrispondenza continuatamente, ossia per un valore infinitesimo.

Si aumenti la x della quantità z, e chiamiamo V il risultato, che ne proviene, avremo perciò $f(x+z) = V$, ed $V = V^{\underline{z}} + z \mid V$ (N.° 9). Ora per essere $f(x)$, e quindi $f(x+z) = V$ funzione intera, non può la quantità $z \mid V$ contenere la z che in forma di moltiplicazione; chiamato adunque T l' aggregato dei termini, che in $f(x+z)$ moltiplicano la z, e però supposto $z \mid V = z\,T$, avremo $V = V^{\underline{z}} + z\,T$, osssia $f(x+z) = V^{\underline{z}}$ $+ z\,T$. Dovendo ora quest' ultima equazione sempre verificarsi, qualunque siasi la z, sarà vera anche quando $z = o$; ma per tale supposizione la $V^{\underline{z}}$ non si altera punto (N.° 11), la $z\,T$ scomparisce, e la $f(x+z)$ diviene $f(x)$; dunque otte-

otterremo $f(x) = V^{\underline{z}}$, e però $V^{\underline{z}} = Y$; sostituisco questo valore nella $f(x+z) = V^{\underline{z}} + zT$, e ci verrà $f(x+z) = Y + zT$. Ciò ritrovato, supponghiamo che attribuito alla x un dato valore, si dia un valore infinitesimo alla z; per tale supposizione la T, non essendo evidentemente che una funzione intera delle x, z, od una costante, non potrà mai acquistare che un valore finito, od infinitesimo; ma chiamata a una quantità finita qualunque, abbiamo $aT : a :: T : \frac{a}{z}$; e frattanto la frazione $\frac{a}{z}$ a cagione del denominatore z infinitesimo à un valore infinito; dunque entro di essa contenendosi la T infinite volte, altrettanto si dovrà contenere la zT entro della a, e quindi la zT avrà un valore infinitamente piccolo; ma allorchè in Y aumentiamo la x di z, la Y istessa resta appunto aumentata di zT. Dunque ec.

51. Se nella $Y = f(x)$, poste successivamente in luogo della x due quantità reali p, q ne vengano i due risultati $f(p)$, $f(q)$ affetti di segno contrario; fra queste p, q dovrà sempre esistere una terza quantità reale, la quale collocata in luogo della x renderà $f(x) = 0$, ossia fra le p, q esisterà sempre una radice reale dell' Equazione (D).

Supponghiamo $p < q$, e sia $f(p) = -P$ quantità negativa, $f(q) = Q$ quantità positiva. Facciamo, mo, che nella $f(x)$ dopo essersi fatto $x = p$, la x si aumenti continuatamente, ossia per passi infinitesimi sino ad acquistare il valore q, anche la quantità $-P$ anderà perciò variando continuatamente, ossia per passi infinitesimi (N.° prec.) fino a cangiarsi nella Q; ma con queste successive variazioni noi passiamo da un risultato $-P$ negativo ad un altro Q positivo, e vi passiam senza salti. Dunque nella nostra supposizione, non potendo evidentemente una quantità negativa giungere ad esser positiva senza passar per lo zero, ne segue, che tra i valori, i quali si ànno al successivo aumentarsi della p, uno ve ne sarà, il quale, sostituito in luogo della x, renderà $f(x) = o$, ossia sarà radice della (D), ma questo è chiaro, che non può essere, se non un valore reale. Dunque ec.

52. Ponendo nella precedente $Y = f(x)$ in luogo della x il massimo coefficiente dei termini negativi aumentato di un unità, il risultato, che quindi nasce, sarà sempre una quantità positiva.

Nella funzione data possiamo sempre supporre, che esistano tutte le potenze della x dalla *mesima* fino alla prima, ed al termine cognito, introducendo col Coefficiente zero quei termini, che possono mancare. Se sia per esempio $Y = x^m + A x^{m-1} - C x^{m-3} - E x^{m-5} + F x^{m-6} + \text{ec.} + V$, scriveremo $Y = x^m + A x^{m-1} + o\, x^{m-2} - C x^{m-3} + o\, x^{m-4} - E x^{m-5} + F x^{m-6} + \text{ec.} + V$, e avremo così nella Y tutte le successive potenze

$m, m-1, m-2, m-3$, ec. . Chiamiamo ora Nx^n uno qualunque dei suoi termini positivi, $-Px^p$ ne esprima un qualsivoglia dei negativi, e ox^r uno qualunque dei mancanti: avendosi $ox^r = Mx^r - Mx^r$, $Nx^n = (M+N)x^n - Mx^n$, e $-Px^p = (M-P)x^p - Mx^p$, essendo M un numero qualunque; potremo scrivere queste espressioni in luogo delle altre ox^r, Nx^n, $-Px^p$, e così facendo, avremo la nostra

$$Y = \left\{ \begin{array}{l} \quad +(M+A)x^{m-1} + Mx^{m-2} + (M-C)x^{m-3} \\ \qquad\quad -Mx^{m-1} - Mx^{m-2} - Mx^{m-3} \\ x^m \\ \quad + Mx^{m-4} + (M-E)x^{m-5} + \text{ec.} + (M+V) \\ \qquad - Mx^{m-4} - Mx^{m-5} - \text{ec.} \quad - M. \end{array} \right.$$

Supponghiamo, che M ci rappresenti il massimo coefficiente dei termini negativi, e che la somma $(M+A)x^{m-1} + Mx^{m-2} + (M-C)x^{m-3} + Mx^{m-4} + \text{ec.} + (M+V)$ si chiami X. Non potendo mai essere alcuno dei Coefficienti C, E, ec. $>$ M, è chiaro, che la X non potrà contenere alcun termine negativo, e la Y si ridurrà alla forma $X + x^m - M(x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + x^{m-4} + x^{m-5} + \text{ec.} + 1)$, ove sotto le parentesi esistono tutte le successive potenze $m, m-1, m-2$, ec., e la X acquisterà sempre un valor positivo, mentre si faccia $x =$ ad una quantità positiva. Moltiplichiamo per $x-1$ la nostra $Y = X + x^m - M(x^{m-1} + x^{m-2} + \text{ec.} + 1)$, otterremo

$(x-1)Y = (x-1)X + (x-1)x^m - M(x^m - 1)$,

e però

e però $(x-1)Y = x^m(x-M-1) + M + (x-1)X$. Supponghiamo $x = M+1$, e chiamiamo rispettivamente P, Q ciò, che divengono perciò le quantità X, Y; sostituendo avremo $(M+1-1)Q = (M+1)^m(M+1-M-1) + M + (M+1-1)P$, e quindi $MQ = M(1+P)$, e finalmente $Q = 1+P$. Ma P non è, che una quantità positiva. Dunque tale essendo anche $Q = 1+P$, ne viene che ec.

53. Un' Equazione Algebraica determinata di grado pari, se à l' ultimo termine negativo, sarà sempre dotata di due radici reali, l' una positiva, e l' altra negativa.

Essendo $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{ec.} - V = 0$ la supposta Equazione, ove m sia numero pari, pongasi nel suo primo membro lo zero in luogo della x, esso diverrà perciò $-V$; che se in luogo della x si ponga il massimo coefficiente M dei termini negativi aumentato di 1, otterremo il risultato $1+P$ quantità sempre positiva (N.° prec.). Dunque avendosi per tali sostituzioni i due risultati $-V$, $1+P$ di segno contrario, pel (N.° 51) tra lo zero, e $P+1$ esister dovrà una quantità reale positiva, la quale renda $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{ec.} - V = 0$, e sia perciò radice di questa Equazione.

2.° Scriviamo ora nella data Equazione $-x$ in luogo di x. Essendo l' esponente m numero pari, non si cangieranno per ciò nè il primo termine x^m, nè l' ultimo $-V$, e avremo così la nuova Equazione $x^m - A x^{m-1} + B x^{m-2} - C x^{m-3} +$ ec. $- V = 0$, le cui radici, cambiatone il segno, altro non sono, che le radici della data. Ora replicato il precedente discorso si trova, che la $x^m - A x^{m-1} + B x^{m-2} -$ ec. $- V = 0$ à una radice reale positiva. Dunque tale radice cangiata di segno altro non sarà, che una radice reale negativa dell' Equazione proposta; ma pel dimostrato essa avea già una radice reale positiva. Dunque ec.

54. Un' Equazione Algebraica determinata di grado dispari à sempre una radice reale positiva, se l' ultimo termine è negativo, e negativa, se l' ultimo termine è positivo.

1.° Supposto m numero dispari, ed $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} +$ ec. $- V = 0$ l' Equazione data, la lettera M ci rappresenti il massimo coefficiente de' suoi termini negativi; vedremo agevolmente, come nel (N.° prec.), che tale Equazione à sempre una radice reale posta tra lo zero, e la quantità $P + 1$: essa dunque sarà sempre dotata di una radice reale positiva.

2.° Restando m numero dispari, sia ora $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} +$ ec. $+ V = 0$ l' Equazione data. Posta $-x$ in luogo di x, avremo $- x^m + A x^{m-1} - B x^{m-2} + C x^{m-3} -$ ec. $+ V = 0$, e però $x^m - A x^{m-1} + B x^{m-2} - C x^{m-3} +$ ec. $- V = 0$. Ma quest' ultima Equazione a cagione dell' ultimo termine $-V$ negativo à una radice reale positiva, e le radici positive di questa altro non sono cambiate di segno, che tante radici negative della

della data (2.° N.° prec.). Dunque in questo caso la data avrà necessariamente una radice reale negativa. Dunque ec.

55. Se un' Equazione pertanto Algebraica determinata à tutte le sue radici immaginarie, essa dovrà ascendere ad un grado pari, ed avere l' ultimo termine positivo, onde sarà della forma $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + \text{ec.} + V = 0$ con l' esponente m numero pari. Ora pel (N.° 24) abbiamo la nostra $V =$ al prodotto di tutte le radici prese col suo proprio segno. Dunque essendo essa V positiva, ne viene che in un Equazione, la quale abbia tutte le sue radici immaginarie, sarà positivo anche il prodotto delle radici medesime.

56. In un' Equazione Algebraica determinata qualunque il numero delle radici immaginarie è sempre pari.

Siano le n radici μ, ν, π, ec. della data (D) tutte immaginarie, e siano le altre $m-n$ radici α, β, γ, ec. tutte reali. Suppongasi

$$(x-\mu)(x-\nu)(x-\pi)\ldots\ldots = x^n + f x^{n-1} + g x^{n-2} + \text{ec.},$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots = x^{m-n} + a x^{m-n-1} + b x^{m-n-2} + \text{ec.}, \text{ e però}$$

$$(x^n + f x^{n-1} + g x^{n-2} + \text{ec.})(x^{m-n} + a x^{m-n-1} + b x^{m-n-2} + \text{ec.}) = x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + \text{ec.}.$$

E' chiaro, che potremo quindi risolvere l' Equazione data nelle due $x^n + f x^{n-1} + g x^{n-2} + \text{ec.} = 0$, $x^{m-n} + a x^{m-n-1} + b x^{m-n-2} + \text{ec.} = 0$, la prima ma delle quali conterrà tutte le radici immaginarie della proposta, e la seconda tutte le reali. Ora tutti i Coefficienti della $x^{m-n} + a x^{m-n-1} + b x^{m-n-2} + \text{ec.} = 0$ non ponno evidentemente che essere tante quantità reali; dunque saranno anche reali tutti i Coefficienti della $x^n + f x^{n-1} + g x^{n-2} + \text{ec.} = 0$; e quindi pel (N.° prec.) l' esponente n di questa Equazione dovrà essere un numero pari; ma n ci esprime il numero di tutte le radici immaginarie μ, ν, π, ec. della (D). Dunque ec.

57. Supponghiamo il grado dell' Equazione data, ossia l' esponente m numero dispari; a cagione di n numero pari (N.° prec.) $m - n$ sarà dispari, e dispari per conseguenza sarà il numero delle radici reali α, β, γ, ec.. Supponghiamo inoltre, che fra queste radici reali α, β, γ, ec. ne esistano delle uguali fra loro; in tale supposizione è chiaro, che o queste stesse saranno di numero dispari, o se non esse, tali saranno le altre disuguali fra loro.

58. Nelle Equazioni di grado dispari aventi l' ultimo termine negativo, sarà necessariamente dispari anche il numero delle sue radici reali positive.

Supposta l' Equazione del 1.° caso del (N.° 54), avendosi in essa l' ultimo termine $-V$ negativo, ed occupando questo un luogo pari, per esser dispari l' esponente m, è manifesto dal (N.° 24) che il prodotto di tutte le radici della supposta equazione dovrà essere positivo: ora ritenendo, che

α,

α, β, γ, ec. ci esprimano le radici reali, e μ, ν, π, ec. le immaginarie, il prodotto $\mu\nu\pi\ldots\ldots$ è sempre positivo (N.° 55); dunque, acciocchè sia positivo il prodotto totale $\alpha\beta\gamma\ldots\mu\nu\pi\ldots$, dovrà essere positivo anche il prodotto delle radici reali $\alpha\beta\gamma\ldots\ldots$; ma affinchè questo succeda, il numero delle radici reali negative non può, che esser pari. Dunque il numero totale delle radici reali essendo dispari (N.° 57), ne segue che fra queste sarà dispari ancora il numero delle radici reali positive.

59. Nel primo Membro di un' Equazione, ove tutte le radici siano immaginarie, se pongasi in luogo dell' incognita una quantità reale qualunque, il risultato, che ne viene, sarà sempre positivo.

Sia data l' Equazione $x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} +$ ec. $= 0$ del (N.° 56), di cui le radici μ, ν, π, ec. sono tutte immaginarie; pongasi nel suo primo membro invece della x una quantità reale p; il risultato $p^n + fp^{n-1} + gp^{n-2} +$ ec. io dico, che dovrà sempre essere positivo. Difatti se si volesse mai negativo, giacchè, ponendo in $x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} +$ ec. in luogo dell' incognita il massimo coefficiente dei termini negativi aumentato di un' unità, se ne ottiene sempre un risultato positivo (N.° 52), tra questo coefficiente così accresciuto, e la supposta quantità p, esister dovrebbe pel (N.° 51) una radice reale della data $x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} +$ ec. $= 0$; ma ciò è contro la supposizione. Dunque ec.

Che

Che se la supposta Equazione non avesse alcun termine negativo, col porre allora in luogo della x un qualche numero positivo, la quantità $x^n + f x^{n-1} + g x^{n-2} +$ ec. non potendo mai diventare, che positiva, verremo evidentemente alla medesima conseguenza di prima. Avendosi dunque $x^n + f x^{n-1} + g x^{n-2} +$ ec. $= (x - \mu)(x - \nu)(x - \pi) \ldots\ldots$ (N.° 56), ne viene che sarà $p^n + f p^{n-1} + g p^{n-2} +$ ec. $= (p - \mu)(p - \nu)(p - \pi) \ldots\ldots$ quantità sempre positiva.

60. Ritenendo come sopra $Y = x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} +$ ec. $+ T x + V = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots\ldots (x - \mu)(x - \nu)(x - \pi) \ldots\ldots$, se moltiplicheremo ciascun termine della Y pel proprio esponente, diminuiremo ciascun esponente di un' unità, e porremo in luogo di x la radice α, il risultato, che nasce, $m \alpha^{m-1} + (m-1) A \alpha^{m-2} + (m-2) B \alpha^{m-3} + (m-3) C \alpha^{m-4} +$ ec. $+ T$, sarà uguale al prodotto $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) \ldots\ldots (\alpha - \mu)(\alpha - \nu)(\alpha - \pi) \ldots\ldots$

Dividiamo la quantità Y pel binomio $x - \alpha$, pel (N.° 33) otterremo il quoto

$$x^{m-1} + (\alpha + A) x^{m-2} + (\alpha^2 + A\alpha + B) x^{m-3} + (\alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C) x^{m-4} + \text{ec.} + (\alpha^{m-1} + A\alpha^{m-2} + \text{ec.} + T) = (x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \ldots\ldots (x - \mu)(x - \nu)(x - \pi) \ldots\ldots,$$

e posta quivi la α in luogo della x, ne verrà

$$\alpha^{m-1} + (\alpha + A)\alpha^{m-2} + (\alpha^2 + A\alpha + B)\alpha^{m-3} + (\alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C)\alpha^{m-4} + \text{ec.} + (\alpha^{m-1} + A\alpha^{m-2} + \text{ec.} + T) = (\alpha - \beta)$$

$= (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) \ldots\ldots (\alpha - \mu)(\alpha - \nu)$
$(\alpha - \pi) \ldots\ldots$

Ora è facile a vedersi, che abbiamo

$$\begin{aligned}
&\alpha^{m-1} + (\alpha + A)\alpha^{m-2} + (\alpha^2 + A\alpha + B)\alpha^{m-3} \\
&+ (\alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C)\alpha^{m-4} + \text{ec.} \\
&+ (\alpha^{m-1} + A\alpha^{m-2} + \text{ec.} + T) \\
&= \quad (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-1} + \alpha^{m-1} + \alpha^{m-1} + \ldots + \alpha^{m-1}) \\
&\quad + A(\alpha^{m-2} + \alpha^{m-2} + \alpha^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + \alpha^{m-2}) \\
&\quad + B(\alpha^{m-3} + \alpha^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha^{m-3}) \\
&\quad + C(\alpha^{m-4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha^{m-4}) \\
&\quad + \quad \text{ec.} \quad + T,
\end{aligned}$$

ove i termini della prima riga sono in numero m, quei della seconda in numero $m - 1$, quei della terza in numero $m - 2$, e così via discorrendo. Dunque con l'unire insieme tali termini, risultando $\alpha^{m-1} + (\alpha + A)\alpha^{m-2} + \text{ec.} = m\alpha^{m-1} + (m - 1) A\alpha^{m-2} + (m - 2) B\alpha^{m-3} + (m-3) C\alpha^{m-4} + \text{ec.} + T$, ne siegue evidentemente, che sarà $m\alpha^{m-1} + (m-1) A\alpha^{m-2} + (m-2) B\alpha^{m-3} + (m-3) C\alpha^{m-4} + \text{ec.} + T = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) \ldots\ldots (\alpha - \mu)(\alpha - \nu)(\alpha - \pi) \ldots\ldots$ C. d. d.

61. Ponendo nel (N.° prec.) in luogo della α la β, la γ, la δ, ec., troveremo in egual modo essere $m\beta^{m-1} + (m-1) A\beta^{m-2} + (m-2) B\beta^{m-3} + (m-3) C\beta^{m-4} + \text{ec.} + T = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) \ldots\ldots (\beta - \mu)(\beta - \nu)(\beta - \pi) \ldots$, $m\gamma^{m-1} + (m-1) A\gamma^{m-2} + (m-2) B\gamma^{m-3} + (m-3) C\gamma^{m-4} + \text{ec.} + T = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta) \ldots (\gamma - \mu)(\gamma - \nu)(\gamma - \pi) \ldots\ldots$

ec.

ec. ec. ec.

Ritenendo poscia, come al (N.° 56), che le

α, β, γ, δ, ec. esprimano tutte le radici reali, e le μ, ν, π, ec. tutte le immaginarie della nostra $Y=o$, se supporremo per brevità di scrivere
$(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)(\alpha-\pi)\ldots\ldots = X'$, $(\beta-\mu)(\beta-\nu)$
$(\beta-\pi)\ldots\ldots = X''$,
$(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)(\gamma-\pi)\ldots = X'''$, ec., poichè le α, β, γ, ec. non sono che tante quantità reali, tutte queste X', X'', X''', ec. pel (N.° 59) saranno altrettante quantità positive.

62. Posta la quantità $Z = mx^{m-1} + (m-1)$ $Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + (m-3)Cx^{m-4} +$ ec. $+T$, se porremo in essa successivamente in luogo della x le radici reali α, β, γ, δ, ec. secondo l' ordine della loro grandezza, il primo risultato sarà positivo, il secondo negativo, il terzo positivo, il quarto negativo, e così di seguito.

Sia $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$, $\gamma > \delta$, ec., avendosi perciò le quantità $\alpha-\beta$, $\alpha-\gamma$, $\alpha-\delta$, ec., e la X' pel (N.° prec.) tutte positive, il loro prodotto $(\alpha-\beta)$ $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots X'$ sarà esso pur positivo. Poichè $\beta < \alpha$, e $\beta > \gamma$, $\beta > \delta$, ec., avremo $\beta-\alpha$ quantità negativa, e positive tutte le altre $\beta-\gamma$, $\beta-\delta$, ec., X'' (N.° prec.); onde il prodotto $(\beta-\alpha)$ $(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots X''$ risulterà negativo. Nel modo medesimo trovandosi i due fattori $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ negativi, e gli altri tutti $\gamma-\delta$, ec., X''' positivi (N.° prec.), dovrà essere positivo il prodotto $(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)\ldots X'''$. Troveremo in simil guisa negativo il prodotto $(\delta-\alpha)(\delta-\beta)$ $(\delta-\gamma)\ldots\ldots X^{\text{IV}}$, e così in progresso. Ora questi

sti successivi prodotti uguagliano rispettivamente le quantità

$m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3} +$
$(m-3)C\alpha^{m-4} +$ ec. $+ T$,
$m\beta^{m-1} + (m-1)A\beta^{m-2} + (m-2)B\beta^{m-3} +$
$(m-3)C\beta^{m-4} +$ ec. $+ T$,
$m\gamma^{m-1} + (m-1)A\gamma^{m-2} + (m-2)B\gamma^{m-3} +$
$(m-3)C\gamma^{m-4} +$ ec. $+ T$,
$m\delta^{m-1} + (m-1)A\delta^{m-2} + (m-2)B\delta^{m-3} +$
$(m-3)C\delta^{m-4} +$ ec. $+ T$, ec. (N.° prec.), e tali quantità altro non sono, se non ciò che diventa la supposta Z col sostituire in essa le radici reali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ec. invece della x. Dunque ec.

I segni pertanto dei nostri risultati si proseguiranno con l' ordine seguente $+, -, +, -, +, -$, ec.

Sia per esempio $Y = x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 44x - 48$, e però $Z = 5x^4 - 8x^3 - 45x^2 + 40x + 44$. Essendo $4, 2, 1, -2, -3$ le radici della $Y = 0$ scritte secondo l' ordine della loro grandezza, le sostituisco successivamente nella Z, e otterremo, secondo ciò, che è stato dimostrato, le quantità alternantisi di segno $+252, -40, +32, -72, +140$.

63. Moltiplicato ciascun termine della $Y = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} +$ ec. per ciascun termine corrispondente della serie Aritmetica $a, a-b, a-2b, a-3b$, e posto il risultato $ax^m + (a-b)Ax^{m-1} + (a-2b)Bx^{m-2} + (a-3b)Cx^{m-3} +$ ec. $= R$, avremo $R = (a-mb)Y + bxZ$.

 Si

Si moltiplichi la Y per m, la Z per x, e sottraggasi il secondo risultato $xZ = mx^m + (m-1)Ax^{m-1} + (m-2)Bx^{m-2} + (m-3)Cx^{m-3} +$ ec. dal primo $mY = mx^m + mAx^{m-1} + mBx^{m-2} + mCx^{m-3} +$ ec., otterremo $mY - xZ = Ax^{m-1} + 2Bx^{m-2} + 3Cx^{m-3} +$ ec.. Ora abbiamo
$R = ax^m + (a-b)Ax^{m-1} + (a-2b)Bx^{m-2}$
$+ (a-3b)Cx^{m-3} +$ ec.
$= a(x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} +$ ec.$)$
$- b(Ax^{m-1} + 2Bx^{m-2} + 3Cx^{m-3} +$ ec.$)$.
Dunque sostituendo sarà $R = aY - b(mY - xZ)$, e però $R = (a - mb)Y + bxZ$.

64. Siano di numero p le radici reali positive della $Y = 0$, di numero q le reali negative, e supponghiamo di porre successivamente secondo l' ordine della loro grandezza tutte queste $p+q$ radici in luogo di x nella funzione $R = (a-mb)Y + bxZ$, per ciascuna di tali sostituzioni dovendo divenir $Y = 0$, in R non resterà mai che la parte bxZ. Ora i successivi valori di Z devono risultare affetti dei segni $+, -, +, -, +, -,$ ec. (N.° 62); dunque anche i successivi valori di bxZ, e però di R dovranno seguire lo stesso andamento, finchè sostituisconsi le p radici reali positive; ma nella sostituzione della q radici reali negative, cangiandosi x in $-x$, è chiaro che i risultati provenienti dalla funzione bxZ dovranno essere di segno contrario a quelli, che provengono dalla Z. Mentre adunque si passa dalla sostituzione dell' ultima delle p radici reali positive alla sostituzione

ne

ne della prima delle q radici negative, cangiando di segno i risultati della Z (N.° 62), i due risultati corrispondenti della bxZ, e però della R dovranno evidentemente conservarsi del segno medesimo, alternandosi poi nella sostituzione delle altre radici.

Suppongasi per esempio $a=7$, $b=2$, onde moltiplicata la precedente $Y=x^5-2x^4-15x^3+20x^2+44x-48$ per la serie $7, 5, 3, 1, -1, -3$ termine per termine, si ottenga $R=7x^5-10x^4-45x^3+20x^2-44x+144$; faccio successivamente $x=4, 2, 1, -2, -3$ (N.° 62), e ottenendosi in corrispondenza $R=+2016, -160, +72, +288, -840$, si vede, che abbiamo in realtà due risultati $+72, +288$, che si succedono con segno uguale, e ciò mentre suppongasi $x=1$, $x=-2$, in tutti poi gli altri casi i segni non fanno che alternarsi.

65. Avendosi dalla R pel (N.° prec.) p risultati alternantisi successivamente nei segni per la successiva sostituzione delle p radici reali positive della $Y=0$ (N.° 62) in luogo della x, dovranno pel (N.° 51) tra queste p radici esistere almeno $p-1$ radici reali positive della Equazione $R=0$; così dovranno per ugual ragione esistere per lo meno $q-1$ radici reali negative della $R=0$ fra le q radici reali negative della $Y=0$; non risultando poi alcuna alternazione di segni per la sostituzione dell' ultima delle p radici positive, e della prima delle q negative (N.° prec.), non potre-

tremo asserire, che siavi alcuna radice reale della $R = o$ tra queste due ora accennate radici della $Y = o$.

Così la precedente $R = 7x^5 - 10x^4 - 45x^3 + 20x^2 - 44x + 144 = o$ avrà sicuramente due radici reali positive fra i tre numeri 4, 2, 1, ed una negativa fra i due -2, -3; ma tra i due numeri 1, -2 dir non possiamo, che ne abbia alcuna.

66. L' Equazione $Y = o$ non potrà avere, che una radice reale positiva, ed una reale negativa più del numero delle radici reali positive, e delle negative della $R = o$.

Siano di numero r le radici reali positive della $R = o$, io dico che la $Y = o$ non ne potrà avere che un numero $r + 1$, poichè se ne avesse $r + 1 + t$, dal (N.° prec.) si vede, che la $R = o$ ne dovrebbe avere un numero $r + t$ contro la supposizione. Egualmente si dimostra, che se la $R = o$ à un numero s di radici reali negative, la $Y = o$ non ne può avere che $s + 1$.

67. Si moltiplichi la $R = o$ per un' altra serie Aritmetica simile alla precedente, e chiamata $R' = o$ la nuova Equazione, che risulta, se questa à un numero r' di radici reali positive, la $R = o$ pel (N.° prec.) non ne potrà avere che $r' + 1$; ma la $Y = o$ non può avere che una radice reale positiva più della $R = o$ (N.° prec.). Dunque le radici reali positive della $Y = o$ non potranno essere in un numero maggiore di $r' + 2$.

In

In simil guisa trovasi, che se s' ci esprime il numero delle radici reali negative della $R' = o$, tali radici nella $Y = o$ non potranno esser più di $s' + 2$.

Moltiplicando la $R = o$ per una terza serie, e chiamata $R'' = o$ l' Equazione, che ne viene, se r'' ci rappresenta il numero delle sue radici reali positive, ed s'' il numero delle negative, è facile il vedere con un raziocinio uguale al precedente, che la $Y = o$ non potrà perciò avere più di $r'' + 3$ radici reali positive, nè più di $s'' + 3$ radici reali negative.

Proseguendo così a moltiplicare per nuove serie aritmetiche, se si ritrovino 3, 4, 5, ec., μ di tali Equazioni $R = o$, $R' = o$, $R'' = o$, ec., e se ρ esprima il numero delle radici reali positive dell' ultima di queste, le radici reali positive della data $Y = o$ non potranno essere in numero maggiore di $\rho + 3$, $\rho + 4$, $\rho + 5$, ec., $\rho + \mu$. Nella istessa maniera troveremo, che, contenendo l' ultima Equazione σ radici reali negative, la data $Y = o$ non può contenerne più di $\sigma + 3$, $\sigma + 4$, $\sigma + 5$, ec., $\sigma + \mu$.

68. In un' Equazione Algebraica chiamo *Variazione* il cangiamento di segno, che succede passando da un termine positivo ad un negativo, o da un negativo ad un positivo; e la costanza dei segni, allorchè si passa da un termine positivo ad un positivo, o da un negativo ad un negativo, la chiamo *Permanenza*.

69. Moltiplicando nell' esposta maniera (N.° 63) il primo membro dell' Equazione $Y=0$ pei termini della Serie a, $a-b$, $a-2b$, $a-3b$, ec., se questi saranno tutti positivi, i termini della $Y=0$ si conserveranno tutti evidentemente del medesimo segno, e se i termini della Serie saran tutti negativi, i termini della $Y=0$ cambieran tutti di segno nel tempo medesimo; onde e nell' un caso, e nell' altro le variazioni, e le permanenze resteranno nell' Equazion, che risulta, dello stesso numero di quelle della $Y=0$; ma se la Serie passi da' termini positivi a' negativi, corrispondentemente ai due termini, ove si fa questo passaggio, è chiaro che moltiplicando nel modo supposto, si toglierà in Y una variazione, od una permanenza.

Supposto $a=12$, $b=2$, moltiplichiamo la precedente $Y=x^5-2x^4-15x^3+20x^2+44x-48$ per la Serie 12, 10, 8, 6, 4, 2, ne verrà il risultato $12x^5-20x^4-120x^3+120x^2+176x-96$; fatto poscia $a=-1$, $b=2$, moltiplichiamo la stessa Y per la Serie -1, -3, -5, -7, -9, -11, otterremo così la quantità $-x^5+6x^4+75x^3-140x^2-396x+528$; e sì nell' uno, che nell' altro di questi risultati il numero delle variazioni, e delle permanenze è lo stesso, come nella Y. Ma se facciasi $a=5$, $b=2$, e si moltiplichi per la serie 5, 3, 1, -1, -3, -5, poichè ne viene $5x^5-6x^4-15x^3-20x^2-132x+240$, vedesi che i due termini $-15x^3+20x^2$ moliplicati corrispondentemenmente pei due 1, -1, divenendo $-15x^3 - 20x^2$, cangiano la loro variazione in una permanenza; e nel (N.° 64), ove supposto $a = 7$, $b = 2$, dalla stessa Y ne è derivata la $7x^5 - 10x^4 - 45x^3 + 20x^2 - 44x + 144$, la permanenza dei due termini $+20x^2 + 44x$ si è mutata per la moltiplicazione dei Numeri 1, -1 nella variazione $+20x^2 - 44x$.

70. Quindi moltiplicando per la nostra Serie a, $a-b$, $a-2b$, $a-3b$, ec. il primo membro di una data Equazione, potremo sempre ridurre una qualunque sua variazione ad una permanenza, e viceversa, coll' attribuire ad a, ed a b gli opportuni valori. Negli ultimi due casi dell' esempio precedente fatto $b = 2$, abbiam tolta nella Y la variazione fra i due termini terzo, e quarto col supporre $a = 5$, e abbiam cambiata la permanenza del quarto al quinto termine col fare $a = 7$. Tal cambiamento poi non potendo succedere, che mentre dal termine positivo $+1$ si passa nella Serie al negativo -1, vedesi che le variazioni, e permanenze corrispondenti agli altri termini devonsi tutte conservar come prima.

71. Abbiasi nell' Equazione $Y = 0$ (N.° 60) un numero μ di variazioni, supposto costantemente $b = 2$, si moltiplichi questa per la Serie a, $a-2$, $a-4$, $a-6$, ec., e con l' attribuire ad a l' opportuno valore, si tolga la prima variazione; l' Equazione risultante, che conterrà una variazione di meno, si moltiplichi di nuovo per la data Serie,

k onde

onde distruggere la seconda variazione; se così proseguiremo a fare, potremo ottenere un numero μ di Equazioni oltre la $Y=0$, nell'ultima delle quali più non esisteran variazioni.

Facendo $a=1$, moltiplichiamo la nostra $Y=x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 44x - 48 = 0$ per la serie 1, -1, -3, -5, -7, -9, ec.; ne verrà l' Equazione $x^5 + 2x^4 + 45x^3 - 100x^2 - 308x + 432 = 0$, in cui manca la variazione tra i primi due termini. Moltiplico questa, fatto $a=5$, per la serie 5, 3, 1, -1, -3, -5, e ci risulta $5x^5 + 6x^4 + 45x^3 + 100x^2 + 924x - 2160 = 0$, Equazione, che non à più variazione fra il terzo, e il quarto termine. Supposto finalmente $a=9$, moltiplico per la serie 9, 7, 5, 3, 1, -1, e risultandoci $45x^5 + 42x^4 + 225x^3 + 300x^2 + 924x + 2160 = 0$, siamo giunti così ad un Equazione, ove più non esiste alcuna variazione; e frattanto tante sono le Equazioni ottenute, quante erano le variazioni nella supposta $Y=0$.

72. Una qualunque Equazione Algebraica determinata non può avere giammai più radici reali positive, di quel che siano le sue variazioni.

Ritenute le supposizioni, ed eseguite le successive operazioni del (N.° prec.), se ϱ esprima il numero delle radici reali positive dell' ultima Equazione risultata, l' Equazione data $Y=0$ pel (N.° 67) non ne potrà avere più di $\mu + \varrho$. Ora quest' ultima Equazione non contenendo alcuna variazione à tutti i suoi termini positivi (N.° 71).

Dun-

Dunque non potendo essa avere evidentemente alcuna radice reale positiva, ne segue, che sarà $\rho = 0$, e per conseguenza avendosi $\mu + \rho = \mu + 0 = \mu$, la $Y = 0$ non potrà avere più di μ radici reali positive, ossia più radici reali positive, di quel che siano le sue variazioni.

La precedente Equazione $x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 44x - 48 = 0$, avendo tre variazioni, non potrà avere più di tre radici reali positive.

73. In modo somigliante togliendo pel (N.° 70) dalla $Y = 0$ tutte le permanenze, e giungendo ad una Equazione finale dotata di sole variazioni, e quindi di niuna radice reale negativa, si dimostra, che essa $Y = 0$ non può avere più radici reali negative, di quel che siano le sue permanenze.

Moltiplico la nostra solita Equazione per la serie $3, 1, -1, -3, -5, -7$, e avuto il risultato $3x^5 - 2x^4 + 15x^3 - 60x^2 - 220x + 336 = 0$, moltiplico questo nuovamente per la Serie $7, 5, 3, 1, -1, -3$, avendosi quindi $21x^5 - 10x^4 + 45x^3 - 60x^2 + 220x - 1008 = 0$, siamo giunti ad un' Equazione, in cui non esistono, che delle variazioni; ma questa è chiaro, che non può avere alcuna radice reale negativa. Dunque la data $x^5 - 2x^4 - \text{ec.} = 0$ pel (N.° 67) non potrà avere più di $2 + 0 = 2$ radici reali negative, e perciò più di quel, che siano le sue permanenze.

74. Poichè supposto in $Y = 0$ μ il numero delle variazioni, e perciò $m - \mu$ il numero delle permanenze, non può il numero delle radici reali

 po-

positive oltrepassare μ, e quello delle reali negative oltrepassare $m-\mu$; se supporremo in questa Equazione reali tutte le m radici, è evidente, che in questo caso le radici reali positive saranno tante precisamente, quante sono le μ variazioni, e le radici reali negative, quante sono le $m-\mu$ permanenze.

CAPO QUARTO.

Delle Trasformazioni in particolare.

75. Trasformare un' Equazione altro non significa, se non determinarne un' altra, le radici della quale abbiano una qualche relazione con le radici della data.

76. Vogliasi trasformare la
(D) $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} +$ ec. $= 0$ in un' altra Equazione, le radici della quale eguaglino le radici della data diminuite di una quantità p.

Chiamata y l' incognita della nuova Equazione, avremo $y = x - p$, e però $x = y + p$. Sostituisco nella data in luogo di x il valore $y + p$, e l' Equazione in y, che ne risulta, sarà la richiesta. Istituito il calcolo, la trasformata sarà

$$y^m + (mp + A)\, y^{m-1} + \Big(\frac{m(m-1)}{2} p^2 + (m-1) A p + B\Big) y^{m-2} + \text{ec.} = 0.$$

Se

Se la data sia per esempio l' Equazione $x^4+2x^3-17x^2-18x+72=0$, e vogliasi $p=4$, fatto $x=y+4$, e sostituito otterremo la Trasformata $y^4+18y^3+103y^2+198y+112=0$, di cui le radici uguaglieranno quelle delle proposta diminuite di 4: e difatti le radici della prima essendo i numeri 3, 2, -3, -4, quelle della seconda sono i numeri $-1=3-4$, $-2=2-4$, $-7=-3-4$, $-8=-4-4$.

77. Se al contrario le radici della trasformata volessersi maggiori di quelle della data della quantità p, supposto in allora $y=x+p$, e però $x=y-p$, sostituirei, come precedentemente, in luogo della x la quantità $y-p$.

78. L' accennata trasformazione potrà sempre servire, onde togliere dalla trasformata un suo termine qualsivoglia a riserva del primo, e ciò col solo attribuire alla p un valore opportuno. Infatti se si supponga la p tale, che risulti $mp+A=0$, in allora è chiaro, che dalla trasformata scomparirà il secondo termine. Se alla p attribuiscasi un valore capace di rendere $\frac{m(m-1)}{2}p^2+(m-1)Ap+B=0$, in tale supposizione scomparirà il terzo termine, e così di seguito. Frattanto riflettasi, che i valori opportuni da attribuirsi alla p ricavansi dalle Equazioni corrispondenti $mp+A=0$, $\frac{m(m-1)}{2}p^2+(m-1)Ap+B=0$, ec., e che perciò alla eliminazione del secondo termine basta ri-

sta risolvere un' Equazione di primo grado; ma per la eliminazione del terzo bisogna risolverne una del grado secondo; per quella del quarto termine conviene scioglierne una del terzo; e finalmente, per fare svanire l' ultimo termine, fa d' uopo sciogliere un' Equazione in p del grado m affatto simile alla proposta, come facilmente vedremo dalla Trasformata medesima, che accenneremo fra poco.

79. Poichè dalla $mp + A = 0$ ritraesi $p = -\frac{A}{m}$, ne viene, che, se porremo nella (D) in luogo della x la quantità $y - \frac{A}{m}$, otterremo una Trasformata, la quale sarà mancante del secondo termine. Sia per esempio $x^3 + 12x^2 - 5x + 13 = 0$ l' Equazione data. Suppongo $x = y - \frac{12}{3} = y - 4$, sostituisco, e ci verrà la trasformata $y^3 - 53y + 161 = 0$ priva del secondo termine.

80. Determinare una maniera facile, e spedita di eseguire la precedente trasformazione.

Poichè abbiamo $x = p + y$, ne verrà

$$x^m = (p+y)^m = p^m + mp^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}p^{m-3}y^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}p^{m-4}y^4 + \text{ec.}$$

$$\begin{aligned} A x^{m-1} &= A(p+y)^{m-1} = A p^{m-1} + (m-1) A p^{m-2} y + \\ &\qquad \frac{(m-1)(m-2)}{2} A p^{m-3} y^2 + \\ &\qquad \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3} A p^{m-4} y^3 + \text{ec.} \\ B x^{m-2} &= B(p+y)^{m-2} = B p^{m-2} + (m-2) B p^{m-3} y + \\ &\qquad \frac{(m-2)(m-3)}{2} B p^{m-4} y^2 + \text{ec.} \\ C x^{m-3} &= C(p+y)^{m-3} = C p^{m-3} + (m-3) C p^{m-4} y + \text{ec.} \\ D x^{m-4} &= D(p+y)^{m-4} = D p^{m-4} + \text{ec.} \\ &\text{ec.} \qquad\qquad\qquad \text{ec.} \end{aligned}$$

Dunque sommando tutte queste Equazioni in colonna, giacchè ne viene $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + \text{ec.} = o$, dovrà anch' essere

$$\left.\begin{aligned} &\left(p^m + A p^{m-1} + B p^{m-2} + C p^{m-3} + D p^{m-4} + \text{ec.} \right) \\ &+ \left(m p^{m-1} + (m-1) A p^{m-2} + (m-2) B p^{m-3} + (m-3) C p^{m-4} + \text{ec.} \right) y \\ &+ \left(\frac{m(m-1)}{2} p^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} A p^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} B p^{m-4} + \text{ec.} \right) y^2 \\ &+ \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} p^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3} A p^{m-4} + \text{ec.} \right) y^3 \\ &+ \left(\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^{m-4} + \text{ec.} \right) y^4 \\ &\quad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \end{aligned} \right| = o$$

e questa non sarà che la trasformata. Ora dalla semplice ispezione di tale Equazione, si vede 1.° che

che la sua quantità cognita, ossia l' ultimo suo termine scritto in primo luogo, altro non è, che il primo membro dell' Equazione data, sostituita la p invece della x: 2.° che il coefficiente del penultimo termine posto in secondo luogo uguaglia l' ultimo, tutti i termini del quale siano stati moltiplicati pel proprio esponente, e divisi per p: 3.° che il coefficiente dell' antepenultimo termine uguaglia il coefficiente del penultimo, di cui tutti i termini siano stati moltiplicati pel proprio esponente, e divisi per $2p$: 4.° che il coefficiente del termine anteriore all' antepenultimo altro non è, che il coefficiente dell' antepenultimo, tutti i cui termini siano stati moltiplicati per gli esponenti rispettivi, e divisi per $3p$, e così di seguito. Nei termini adunque di questa trasformata abbiamo un andamento costante, per mezzo del quale potremo speditamente formare una simile Equazione, senza eseguire le sostituzioni del (N.° 76); e difatti

Nel primo Membro dell' Equazione data, posta la p in luogo della x, scrivasi questo risultato in una riga. Ciascun termine di questa prima riga si moltiplichi in seguito pel proprio esponente, si divida per p, e ciò, che ne viene, pongasi in una seconda riga. Si moltiplichi poscia ciascun termine della seconda riga pel proprio esponente, dividasi per $2p$, e scrivasi in una terza riga quel, che risulta. Tutti i termini di questa terza riga si moltiplichino pei rispettivi esponenti, si divi-

dividano per $3p$, e si collochino in una quarta, e si prosegua in tal modo, finchè si giunga ad un risultato uguale allo zero. Uniscansi allora tutte queste righe insieme, dopo aver moltiplicata la seconda per y, la terza per y^2, la quarta per y^3, e così di seguito, e quella, che così ne proviene, sarà l' Equazione cercata.

Vogliasi per esempio trasformare la $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$ in un' altra Equazione, di cui le radici superino quelle della data del numero 4. Supposto perciò $x = y - 4$, faccio nel primo Membro della nostra Equazione la sostituzione della p in luogo della x, eseguisco la sovraccennata operazione, e avutone il risultato

$$\left.\begin{array}{l} (p^4 - 2p^3 - 13p^2 + 14p + 24) \\ + (4p^3 - 6p^2 - 26p + 14)y \\ + (6p^2 - 6p - 13)y^2 \\ + (4p - 2)y^3 \\ + y^4 \end{array}\right| = 0$$

faccio $p = -4$, sostituisco, e avremo $144 - 234y + 107y^2 - 18y^3 + y^4 = 0$, ossia $y^4 - 18y^3 + 107y^2 - 234y + 144 = 0$ per l' Equazione richiesta. Le radici difatti dell' Equazione in x sono $4, 2, -1, -3$, e quelle della trasformata sono $8, 6, 3, 1$, radici, ciascuna delle quali supera del numero 4 la sua corrispondente tra le $4, 2, -1, -3$.

81. Chiamati per brevità A′, B′, C′, ec., S′, T′, V′ i coefficienti della Trasformata precedente, ponghiamo $y = \frac{1}{u}$, sostituendo essa diverrà

$V' + \frac{T'}{u} + \frac{S'}{u^2} +$ ec. $+ \frac{C'}{u^{m-3}} + \frac{B'}{u^{m-2}} + \frac{A'}{u^{m-1}} + \frac{1}{u^m}$ $= 0$, e quindi, moltiplicando per u^m, $V'u^m + T'u^{m-1} + S'u^{m-2} +$ ec. $+ C'u^3 + B'u^2 + A'u + 1 = 0$; donde si vede, che nella supposizione di $x = p + \frac{1}{u}$ si avrà la Trasformata in u, determinando come nella trasformazion precedente i Coefficienti A', B', C', ec., S', T', V', e moltiplicando in seguito l' ultimo V' per u^m, il penultimo T' per u^{m-1}, S' per u^{m-2}, e così in progresso.

82. Trasformare l' Equazione (D) in un' altra tale, che l' unità risulti media proporzionale fra le radici della proposta, e quelle della Trasformata.

Chiamata perciò y l' incognita della Trasformata, poichè deve essere $x : 1 :: 1 : y$, e però $x = \frac{1}{y}$, sostituisco nella data $\frac{1}{y}$ in luogo di x, e il risultato $\frac{1}{y^m} + \frac{A}{y^{m-1}} + \frac{B}{y^{m-2}} + \frac{C}{y^{m-3}} +$ ec. $+ \frac{T}{y} + V = 0$, ovvero $Vy^m + Ty^{m-1} +$ ec. $+ Cy^3 + By^2 + Ay + 1 = 0$ altro non sarà, che la Trasformata richiesta.

83. Essendo α, β, γ, δ, ec., ω le radici dell' Equazione proposta, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$, ec., $\frac{1}{\omega}$ saranno quelle della Trasformata; onde se le prime siano disposte in modo, che $\alpha > \beta > \gamma > \delta >$ ec. $> \omega$,

$> \omega$, verran le seconde distribuite in un ordine affatto contrario, cosicchè $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\gamma} < \frac{1}{\delta} <$ ec. $< \frac{1}{\omega}$; e in tal modo la radice massima α della proposta verrà cangiata nella $\frac{1}{\alpha}$, che sarà la minima della Trasformata, e la radice ω minima della proposta si cangierà in $\frac{1}{\omega}$ radice massima della Trasformata. Mediante adunque questa trasformazione, potremo mutare le radici massime di un' Equazione in minime, e viceversa.

84. Data la solita (D), trasformarla in un' altra in y tale, che le radici della prima stiano a quelle della seconda in una data ragione di $r:s$.

Avendosi per la ipotesi $x:y::r:s$, sarà $x = \frac{ry}{s}$, e quindi sostituendo, avremo la trasformata $\frac{r^m}{s^m}y^m + A\frac{r^{m-1}}{s^{m-1}}y^{m-1} + B\frac{r^{m-2}}{s^{m-2}}y^{m-2} + C\frac{r^{m-3}}{s^{m-3}}y^{m-3}$ $+$ ec. $+ T\frac{r}{s}y + V = 0$. Questa, e le precedenti trasformazioni eseguisconsi tutte egualmente, ancorchè il primo termine dell' Equazione proposta abbia un Coefficiente diverso dall' unità.

85. Liberare una data Equazione $x^m + \frac{A}{a}x^{m-1} + \frac{B}{b}x^{m-2} + \frac{C}{c}x^{m-3} +$ ec. $+ \frac{V}{v} = 0$ dalle frazioni,

 sen-

senza che il primo termine acquisti nuovo Coefficiente.

Supponghiamo nella precedente $x = \frac{ry}{s}$ la quantità $r = 1$, e sostituiscasi il valore $\frac{y}{s}$ in luogo di x nella data Equazione; otterremo così la Trasformata $\frac{y^m}{s^m} + \frac{A y^{m-1}}{a s^{m-1}} + \frac{B y^{m-2}}{b s^{m-2}} + \frac{C y^{m-3}}{c s^{m-3}} + \text{ec.} + \frac{V}{v} = 0$, ossia $y^m + \frac{A s y^{m-1}}{a} + \frac{B s^2 y^{m-2}}{b} + \frac{C s^3 y^{m-3}}{c} + \text{ec.}$ $+ \frac{V s^m}{v} = 0$. Ora se la s sia divisibile per ciascuno dei denominatori a, b, c, ec., v, come se sia $s = abc \ldots v$, eseguite le divisioni, la Trasformata è chiaro, che non contiene più frazioni di sorte alcuna, e frattanto al primo termine non apponesi nuovo Coefficiente; dunque, al nostro intento, non avremo, che a sostituire nella data in luogo di x la quantità $\frac{y}{s}$, essendo in generale $s = abc \ldots v$, e l' Equazione, che ne risulta, sarà la richiesta.

Così nella $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{5} = 0$ fatto $x = \frac{y}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{y}{30}$, e sostituito, otterremo la Trasformata $y^3 - 45 y^2 + 600 y + 5400$ priva affatto di rotti, e non avente nel primo termine altro Coefficiente, che l' unità.

86.

86. Trasformare la nostra (D) in un' altra Equazione, le cui radici siano i quadrati delle differenze fra le radici della proposta; ossia determinare la così detta *Equazione delle differenze*.

Essendo α, β, γ, δ, ec. le radici della data, $(\alpha-\beta)^2$, $(\alpha-\gamma)^2$, $(\alpha-\delta)^2$, $(\beta-\gamma)^2$, ec. dovranno formar le radici della Trasformata. Supponghiamo per tanto esser questa la $y^n + M y^{n-1} + N y^{n-2} + \text{ec.} = 0$, ed è chiaro, che avremo sciolto il Problema, quando saremo in essa giunti a determinare l' esponente n, ed i Coefficienti M, N, ec.; ora in quanto al primo, tante essendo le radici della Trasformata, e però tanto il suo grado, quante sono le combinazioni, che si possono fare a due a due con le m quantità α, β, γ, δ, ec. nella formazione dei quadrati superiori, vedesi che avremo $n = \frac{m(m-1)}{2}$; in quanto poi ai Coefficienti M, N, ec., affine di determinarli, istituiscasi il seguente calcolo.

Eleviamo ad una potenza pari qualunque $2k$ le quantità $\alpha-\beta$, $\alpha-\gamma$, $\beta-\gamma$, ec., otterremo così

$$(\alpha-\beta)^{2k} = \alpha^{2k} - 2k\alpha^{2k-1}\beta + \frac{2k(2k-1)}{2}\alpha^{2k-2}\beta^2$$

$$- \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot3}\alpha^{2k-3}\beta^3 + \dots\dots$$

$$\pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\dots(k+2)}{2\cdot3\dots(k-1)}\alpha^{k+1}\beta^{k-1}$$

$$\mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\dots(k+1)}{2\cdot3\dots k}\alpha^{k}\beta^{k}$$

$\pm 2k$

$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+2)}{2\cdot3\ldots\ldots(k-1)}\alpha^{k-1}\beta^{k+1}$$

$$\mp\ldots\ldots-\frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot3}\alpha^3\beta^{2k-3}$$

$$+\frac{2k(2k-1)}{2}\alpha^2\beta^{2k-2}-2k\alpha\beta^{2k-1}+\beta^{2k},$$

$$(\alpha-\gamma)^{2k}=\alpha^{2k}-2k\alpha^{2k-1}\gamma+\frac{2k(2k-1)}{2}\alpha^{2k-2}\gamma^2$$

$$-\frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot3}\alpha^{2k-3}\gamma^3+\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+2)}{2\cdot3\ldots\ldots(k-1)}\alpha^{k+1}\gamma^{k-1}$$

$$\mp\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+1)}{2\cdot3\ldots\ldots k}\alpha^k\gamma^k$$

$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+2)}{2\cdot3\ldots\ldots(k-1)}\alpha^{k-1}\gamma^{k+1}$$

$$\mp\ldots\ldots-\frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot3}\alpha^3\gamma^{2k-3}$$

$$+\frac{2k(2k-1)}{2}\alpha^2\gamma^{2k-2}-2k\alpha\gamma^{2k-1}+\gamma^{2k},$$

$$(\beta-\gamma)^{2k}=\beta^{2k}-2k\beta^{2k-1}\gamma+\frac{2k(2k-1)}{2}\beta^{2k-2}\gamma^2$$

$$-\frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot3}\beta^{2k-3}\gamma^3+\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+2)}{2\cdot3\ldots\ldots(k-1)}\beta^{k+1}\gamma^{k-1}$$

$$\mp\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2\cdot3\ldots\ldots k}\beta^k\gamma^k$$

$\pm 2k$

$$\pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2\cdot 3\ldots(k-1)}\beta^{k-1}\gamma^{k+1}$$

$$\mp \ldots - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot 3}\beta^3\gamma^{2k-3}$$

$$+\frac{2k(2k-1)}{2}\beta^2\gamma^{2k-2} - 2k\beta\gamma^{2k-1} + \gamma^{2k},$$

ec. ec. ec.,

potenze, nelle quali dovranno prendersi i segni superiori, mentre k sia un numero dispari, e gl' inferiori, mentre k sia pari. Sommiamo tutte queste potenze, e avremo

$$(\alpha-\beta)^{2k} + (\alpha-\gamma)^{2k} + (\beta-\gamma)^{2k} + \text{ec.}$$
$$= (m-1)(\alpha^{2k} + \beta^{2k} + \gamma^{2k} + \text{ec.})$$
$$-2k(\alpha^{2k-1}\beta + \alpha\beta^{2k-1} + \alpha^{2k-1}\gamma + \alpha\gamma^{2k-1}$$
$$+\beta^{2k-1}\gamma + \beta\gamma^{2k-1} + \text{ec.})$$
$$+\frac{2k(2k-1)}{2}(\alpha^{2k-2}\beta^2 + \alpha^2\beta^{2k-2} + \alpha^{2k-2}\gamma^2$$
$$+\alpha^2\gamma^{2k-2} + \beta^{2k-2}\gamma^2 + \beta^2\gamma^{2k-2} + \text{ec.})$$
$$-\frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot 3}(\alpha^{2k-3}\beta^3 + \alpha^3\beta^{2k-3} + \alpha^{2k-3}\gamma^3$$
$$+\alpha^3\gamma^{2k-3} + \beta^{2k-3}\gamma^3 + \beta^3\gamma^{2k-3} + \text{ec.})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2\cdot 3\ldots(k-1)}(\alpha^{k+1}\beta^{k-1}$$
$$+\alpha^{k-1}\beta^{k+1} + \alpha^{k+1}\gamma^{k-1} + \alpha^{k-1}\gamma^{k+1}$$
$$+\beta^{k+1}\gamma^{k-1} + \beta^{k-1}\gamma^{k+1} + \text{ec.})$$
$$\mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2\cdot 3\ldots k}(\alpha^k\beta^k + \alpha^k\gamma^k$$
$$+\beta^k\gamma^k + \text{ec.})$$

Ora

Ora pei (N.i 34, 39) abbiamo $(\alpha-\beta)^{2k}+(\alpha-\gamma)^{2k}+(\beta-\gamma)^{2k}+$ ec. $=\Sigma y^k$, $\alpha^{2k}+\beta^{2k}+\gamma^{2k}+$ ec. $=\Sigma x^{2k}$, e le quantità comprese sotto le parentesi nel secondo, terzo, quarto, ec. termine vengono rappresentate dalle espressioni $\Sigma x^{2k-1}x$, $\Sigma x^{2k-2}x^2$, $\Sigma x^{2k-3}x^3$, ec., $\Sigma x^{k+1}x^{k-1}$, $\Sigma \overline{x x}^k$; avendosi inoltre pei (N.i 41, 47) $\Sigma x^{2k-1}x = \Sigma x^{2k-1}\Sigma x - \Sigma x^{2k}$, $\Sigma x^{2k-2}x^2 = \Sigma x^{2k-2}\Sigma x^2 - \Sigma x^{2k}$, $\Sigma x^{2k-3}x^3 = \Sigma x^{2k-3}\Sigma x^3 - \Sigma x^{2k}$, ec., $\Sigma x^{k+1}x^{k-1} = \Sigma x^{k+1}\Sigma x^{k-1} - \Sigma x^{2k}$, $\Sigma \overline{x x}^k = \dfrac{\Sigma x^k \Sigma x^k - \Sigma x^{2k}}{2}$.

Sostituendo adunque ne verrà

$$\Sigma y^k = (m-1)\Sigma x^{2k} - 2k(\Sigma x^{2k-1}\Sigma x - \Sigma x^{2k}) + \frac{2k(2k-1)}{2}(\Sigma x^{2k-2}\Sigma x^2 - \Sigma x^{2k}) - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot 3}(\Sigma x^{2k-3}\Sigma x^3 - \Sigma x^{2k}) + \ldots\ldots \pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2\cdot 3\ldots(k-1)}(\Sigma x^{k+1}\Sigma x^{k-1} - \Sigma x^{2k}) \mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2\cdot 3\ldots k}\left(\frac{\Sigma x^k \Sigma x^k - \Sigma x^{2k}}{2}\right),$$ ossia

$$\Sigma y^k = m\Sigma x^{2k} - \left(1 - 2k + \frac{2k(2k-1)}{2} - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot 3} + \ldots \pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2\cdot 3\ldots(k-1)} \mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2\cdot 3\ldots k}\cdot\frac{1}{2}\right)\Sigma x^{2k}$$

$$-2k\Sigma x^{2k-1}\Sigma x+\frac{2k(2k-1)}{2}\Sigma x^{2k-2}\Sigma x^2-$$
$$\frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot 3}\Sigma x^{2k-3}\Sigma x^3+\ldots\ldots\pm$$
$$\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+2)}{2\cdot 3\ldots\ldots(k-1)}\Sigma x^{k+1}\Sigma x^{k-1}\mp$$
$$\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+1)}{2\cdot 3\ldots\ldots k}\times\frac{\Sigma x^k\Sigma x^k}{2}\,.$$

Ma per la natura dei Coefficienti nel binomio Newtoniano abbiamo

$$1-2k+\frac{2k(2k-1)}{2}-\frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot 3}+\ldots\ldots\pm$$
$$\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+2)}{2\cdot 3\ldots\ldots(k-1)}\mp$$
$$\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+1)}{2\cdot 3\ldots\ldots k}\pm$$
$$\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+2)}{2\cdot 3\ldots\ldots(k-1)}\mp$$
$$\ldots\ldots-\frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot 3}$$
$$+\frac{2k(2k-1)}{2}-2k+1=0\,,$$ e conseguentemente abbiamo anche la sua metà

$$1-2k+\frac{2k(2k-1)}{2}-\frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2\cdot 3}+\ldots\ldots\pm$$
$$\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+2)}{2\cdot 3\ldots\ldots(k-1)}\mp$$
$$\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots\ldots(k+1)}{2\cdot 3\ldots\ldots k}\times\frac{1}{2}=0\,.$$

Tolto adunque dal valore di Σy^k ciò, che uguaglia lo zero, resterà

$$\Sigma y^k = m \Sigma x^{2k} - 2k \Sigma x^{2k-1} \Sigma x + \frac{2k(2k-1)}{2} \times$$

$$\Sigma^{2k-2} \Sigma x^2 - \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{2 \cdot 3} \Sigma x^{2k-3} \Sigma x^3 +$$

$$\ldots \pm \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+2)}{2 \cdot 3 \ldots (k-1)} \Sigma x^{k+1} \Sigma x^{k-1}$$

$$\mp \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{2 \cdot 3 \ldots k} \times \frac{\Sigma x^k \Sigma x^k}{2}.$$

Abbiamo così una formola, da cui, supponendo successivamente $k = 1, 2, 3$, ec., potremo ricavare i valori delle quantità Σy, Σy^2, Σy^3, ec. espressi per le somme delle x, e quindi pei Coefficienti A, B, C, ec. della data (N.° 35); onde poi potremo determinare pel (N.° 38) i Coefficienti M, N, ec., che si richieggono, della Trasformata.

87. Cominciamo dal fare $k = 1$, poichè l' ultimo termine della nostra formola deve esser diviso per 2, e deve avere per Coefficiente la quantità $\frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{2 \cdot 3 \ldots k}$, ne segue che sarà $\Sigma y = m \Sigma x^2 - \Sigma x \Sigma x$.

Facciamo in secondo luogo $k = 2$, otterremo perciò $\Sigma y^2 = m \Sigma x^4 - 4 \Sigma x^3 \Sigma x + \frac{4 \cdot 3}{2} \times \frac{\Sigma x^2 \Sigma x^2}{2}$.

Così, facendo $k = 3$, ne verrà $\Sigma y^3 = m \Sigma x^6 - 6 \Sigma x^5 \Sigma x + \frac{6 \cdot 5}{2} \Sigma x^4 \Sigma x^2 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} \times \frac{\Sigma x^3 \Sigma x^3}{2}$,

e così in progresso.

Sia

Sia per esempio $x^3 - 2x^2 - 33x + 90 = 0$ l' Equazione data, di cui si voglia l' Equazione delle differenze. Avendosi in questo caso $m = 3$, ne verrà $n = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$, ed essendo perciò la Trasformata della forma $y^3 + My^2 + Ny + P = 0$, cerco il valore dei Coefficienti M, N, P. Poichè $\Sigma x = 2$, $\Sigma x^2 = 70$, $\Sigma x^3 = -64$, $\Sigma x^4 = 2002$, $\Sigma x^5 = -4408$, $\Sigma x^6 = 63010$, sostituendo ci risulta
$\Sigma y = 3 \times 70 - 2 \cdot 2 = 210 - 4 = 206$,
$\Sigma y^2 = 3 \cdot 2002 + 4 \cdot 64 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 3}{2} \times \frac{70 \cdot 70}{2} = 21218$,
$\Sigma y^3 = 3 \cdot 63010 + 6 \cdot 4408 \cdot 2 + \frac{6 \cdot 5}{2} \times 2002 \cdot 70 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} \times \frac{64 \cdot 64}{2} = 2303066$. Ma pel (N.° 35) abbiamo
$\Sigma y + M = 0$,
$\Sigma y^2 + M \Sigma y + 2N = 0$,
$\Sigma y^3 + M \Sigma y^2 + N \Sigma y + 3P = 0$.
Dunque otterremo, sostituendo, $M = -206$,
$N = -\frac{\Sigma y^2 + M \Sigma y}{2} = 10609$, $P = -\frac{\Sigma y^3 + M \Sigma y^2 + N \Sigma y}{3} = -39204$, e quindi l' Equazione richiesta sarà
$y^3 - 206y^2 + 10609y - 39204 = 0$.
Le radici della $x^3 - 2x^2 - 33x + 90 = 0$ sono $3, 5, -6$, quelle della Equazione in y sono $(3-5)^2 = 4$, $(3+6)^2 = 81$, $(5+6)^2 = 121$.

CAPO QUINTO.

Delle Trasformazioni in generale.

88. Le radici d' un' Equazione Trasformata avendo pel (N.° 75) una relazione con le radici della proposta, ne viene che le une potrannosi sempre esprimere per mezzo delle altre, o in tutto, o in parte, e le une perciò saranno funzioni delle altre; ora i Coefficienti pel (N.° 31) sono funzioni delle rispettive radici; dunque anche i Coefficienti della Trasformata saranno funzioni delle radici, e dei Coefficienti della proposta, e viceversa. Essendo pertanto $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + \text{ec.} = 0$ l' Equazione data, $y^n + M y^{n-1} + N y^{n-2} + \text{ec.} = 0$ la Trasformata, e chiamate x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$ le radici della prima, y', y'', y''', ec., $y^{(n)}$ le radici della seconda, avremo una qualunque di queste per esempio la $y' = f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(m)})$.

89. Vogliasi trasformare l' Equazione $x^2 + Ax + B = 0$ in un' altra, le radici della quale uguaglino quelle della proposta aumentate di $\frac{A}{2}$. Chiamata perciò y la nuova incognita, sarà $y = x + \frac{A}{2}$, e perciò $x = y - \frac{A}{2}$, sostituisco, e otterremo la Trasformata $y^2 + B - \frac{A^2}{4} = 0$. Pongasi nella sup-

posta $y = x + \frac{A}{2}$ la radice x' in luogo di x, la corrispondente y' in luogo di y, e $-(x' + x'')$ invece di A (N.° 31), ci risulterà così $y = x' - \frac{x' + x''}{2} = \frac{x' - x''}{2}$ pel valore della radice y' della Trasformata, funzione, come si vede, delle radici della proposta.

90. Ciò, che si è detto nel presente esempio di x', dir si poteva egualmente di x'', e viceversa; in quanto che il discorso fatto nella trasformazione, e le proprietà dipendenti dall' Equazione sono comuni ad amendue le radici x', x''; dunque nell' espressione $\frac{x' - x''}{2}$ se porrò x'' in luogo di x', ed x' in luogo di x'', ne verrà tuttora un vero valore di y, e però non solo sarà radice della Trasformata la quantità $\frac{x' - x''}{2}$, ma lo sarà l' altra pure $\frac{x'' - x'}{2}$. Dunque avendosi già $y' = \frac{x' - x''}{2}$, dovrà essere $y'' = \frac{x'' - x'}{2}$.

91. Proposta l' Equazione $x^3 + A x^2 + B x + C = 0$, vogliasene un' altra in y, di cui le radici altro non siano, che i diversi quoti di due qualunque delle radici della data diminuiti dell' altra radice, che rimane; ritenute cioè le precedenti denominazioni, debba uno dei valori di y

per

per esempio y' essere $\frac{x'}{x''} - x'''$.

Affine di avere tutti i valori della y, è chiaro, che non dovremo, se non formare tutti i quoti possibili a due a due fra le x', x'', x''', e da essi sottrarre l' altra radice, che rimane; ma, così operando, otteghiamo i risultati $\frac{x'}{x''} - x'''$, $\frac{x''}{x'} - x'''$, $\frac{x'''}{x''} - x'$, $\frac{x''}{x'''} - x'$, $\frac{x'}{x'''} - x''$, $\frac{x'''}{x'} - x''$; questi dunque saranno i valori della y, ossia le radici della Trasformata. Ora supposto

$$y' = \frac{x'}{x''} - x''' = f(x')(x'')(x''') \text{ (N.° 2), ne viene}$$

$$y'' = \frac{x''}{x'} - x''' = f(x'')(x')(x'''),$$

$$y''' = \frac{x'''}{x''} - x' = f(x''')(x'')(x'),$$

$$y^{\text{IV}} = \frac{x''}{x'''} - x' = f(x'')(x''')(x'),$$

$$y^{\text{V}} = \frac{x'}{x'''} - x'' = f(x')(x''')(x''),$$

$$y^{\text{V}'} = \frac{x'''}{x'} - x'' = f(x''')(x')(x'').$$

Questi sei risultati adunque quelli essendo evidentemente, che nascono dalla $f(x')(x'')(x''')$ per le varie permutazioni fra le x', x'', x''', ne segue, che, affine di ottenere le radici y', y'', ec., e conoscere così il grado della Trasformata, non dovremo che determinare le permutazioni della $f(x')(x'')(x''')$, ed il il loro numero $1 . 2 . 3 = 6$ ci esprimerà il grado richiesto.

92. Sia l'Equazione proposta di un grado qualunque m, e sia y' una delle radici della trasformata $=$ ad una funzione Algebraica razionale qualunque siasi delle x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$, che esprimerò in generale per $f(x')(x'')(x''')(x^{\text{v}}) \dots (x^{(m)})$. In tal caso io dico, che il grado della Trasformata, chiamato π, sarà generalmente parlando $= 1 . 2 . 3 . 4 \dots m$.

Mentre si eseguisce una qualsivoglia trasformazione, considerandosi tutte le radici x', x'', x''', ec. egualmente, e ciò che di una si asserisce, asserendosi in egual modo dell'altre, ne viene evidentemente, che nella supposta funzione nel luogo, ove pel valore di y' si è collocata una delle radici per esempio x', affine di ottenere tutte le radici della Trasformata, dovremo collocare successivamente ciascuna delle altre x'', x''', x^{v}, ec.; laddove è stata posta la x'', dovransi porre successivamente le x', x''', x^{v}, ec.; nel luogo della x''' dovransi mettere successivamente le x', x'', x^{v}, ec., e così in progresso. Per tal modo nel (N.° prec.), ove avevamo $y' = \frac{x'}{x''} - x'''$, abbiam prima posto x'' nel luogo della x', e la x' nel luogo della x'', e ci è risultato il valore $y'' = \frac{x''}{x'} - x'''$; poscia lasciata in y' la x'' al suo posto, abbiam messa la x''' nel luogo della x', e la x' nel luogo della x''', risultandoci

doci in tal guisa il valore $y''' = \frac{x'''}{x''} - x'$; e così operando in seguito, dalla sola $y' = \frac{x'}{x''} - x'''$ tutti abbiamo ottenuti i valori della y. Ora nell' eseguire la precedente operazione, come si è detto della $f(x')(x'')(x''')$ (N.° prec.), così nella funzione generale $f(x')(x'')(x''')(x^{\text{v}}) \ldots (x^{(m)})$ altro non facciamo evidentemente, che formare tutte le permutazioni possibili tra le x', x'', x''', x^{v}, ec., $x^{(m)}$. Dunque tali permutazioni essendo di numero $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m$ (N.° 45), ne viene, che un simile prodotto esprimerà in generale il numero delle radici, e quindi il grado della nostra Trasformata.

Così nel (N.° prec.), ove $m = 3$, abbiam veduto essere $\pi = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

93. Eseguite le π permutazioni della (A) $f(x')(x'')(x''')(x^{\text{v}}) \ldots (x^{(m)})$, le radici della Trasformata saranno

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x')(x'')(x''')(x^{\text{v}}) \ldots (x^{(m)}), \\
y'' &= f(x'')(x')(x''')(x^{\text{v}}) \ldots (x^{(m)}), \\
y''' &= f(x''')(x'')(x')(x^{\text{v}}) \ldots (x^{(m)}), \\
y^{\text{v}} &= f(x^{\text{v}})(x'')(x''')(x') \ldots (x^{(m)}), \\
y^{\text{v}}_{\text{v}} &= f(x')(x''')(x'')(x^{\text{v}}) \ldots (x^{(m)}), \\
y^{\text{v}'} &= f(x')(x^{\text{v}})(x''')(x'') \ldots (x^{(m)}), \\
y^{\text{v}''} &= f(x''')(x')(x'')(x^{\text{v}}) \ldots (x^{(m)}), \\
y^{\text{v}'''} &= f(x''')(x'')(x^{\text{v}})(x') \ldots (x^{(m)}), \\
&\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

94. Se la supposta (A) sia razionale, abbiamo

mo nel (N.° 92) asserito, e dimostrato, che generalmente parlando il grado della Trasformata sarà $= \pi = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m$. Si è detto generalmente parlando, poichè se le permutazioni della (A) ci danno dei risultati tutti disuguali fra loro, la cosa è sempre vera a tutto rigore; ma se alcuni di questi risultati sono fra loro uguali, in allora il numero π ci esprimerà bensì il grado della Trasformata in certo modo, ma non già con tutta la precisione. Che succeda in questa supposizione, noi lo vedremo fra poco, premesse le osservazioni, che seguono; e che succeda poi, mentre la (A) sia funzione irrazionale, lo vedremo in altro Capo.

95. Fatte le permutazioni tutte della $f(x')(x'')(x''')$, e scritti i risultati, come quì sotto
1.ª $f(x')(x'')(x''')$, 2.ª $f(x''')(x')(x'')$,
3.ª $f(x'')(x''')(x')$, 4.ª $f(x')(x''')(x'')$,
5.ª $f(x'')(x')(x''')$, 6.ª $f(x''')(x'')(x')$,
supponghiamo, che una di tali funzioni sia uguale ad un altra qualunque corrispondente, che per es. sia la 1.ª = alla 4.ª Tale uguaglianza potrà succedere in due maniere diverse, primo pel valore particolare delle radici, secondo per la forma della funzione; nel primo caso le due funzioni dovranno evidentemente esser uguali fra loro solamente in certi casi determinati; nel secondo si avrà l' uguaglianza, qualunque valore diasi alla x. Siano per es. le due funzioni $\frac{x'-x''}{x'''}$, $x'^2 - x''x'''$, e

 fac-

facciamo in amendue la permutazione di x'' in x'''; la prima diverrà $\frac{x'-x'''}{x''}$, la seconda $x'^2-x'''x''$; ora se si vuole, che la $\frac{x'-x''}{x'''}$ sia $=\frac{x'-x'''}{x''}$, questo non potrà succedere, che mentre abbiano le x, collocate come si ritrovano certi particolari valori, mentre per es. sia $x'=10$, $x''=7$, $x'''=3$, risultando da ciò $\frac{x'-x''}{x'''}=\frac{10-7}{3}=1$. $\frac{x'-x'''}{x''}=\frac{10-3}{7}=1$; ma se, supposto $x'=10$, $x''=7$, abbiasi $x'''=5$, ottenendosi $\frac{x'-x''}{x'''}=\frac{10-7}{5}=\frac{3}{5}$, $\frac{x'-x'''}{x''}=\frac{10-5}{7}=\frac{5}{7}$, non potrà essere $\frac{x'-x''}{x'''}=\frac{x'-x'''}{x''}$. Al contrario la funzione $x'^2-x''x'''$ essendo $=x'^2-x'''x''$ a cagione della sua forma, e però indipendentemente dal valore particolare delle radici, tale uguaglianza sempre si verificherà, qualunque valore si attribuisca alle x', x'', x'''.

Se le permutazioni si eseguiscono sulla funzione generale (A), è chiaro che potrà farsi lo stesso discorso, e la distinzione medesima nelle uguaglianze, che abbiamo ora esposte.

96. Supponghiamo inoltre, che sopra due funzioni corrispondenti uguali eseguiscasi una medesima permutazione; se queste supposte funzioni

ni sono uguali per la loro forma, come le due $x'^2 - x''x'''$, $x'^2 - x'''x''$ (N.° prec.), in allora tale uguaglianza dovendosi conservare, qualunque quantità pongasi in luogo della x in amendue le funzioni nel tempo medesimo (N.° prec.), ne viene che essa dovrà conservarsi ancora sotto la permutazione supposta, non facendosi con questa, che porre in entrambe nel tempo stesso in luogo della x certi determinati valori diversi dai primi. Così permutando nelle $x'^2 - x''x'''$, $x'^2 - x'''x''$ la x' nella x''', la x'' nella x', e la x''' nella x'', ne verranno le due funzioni $x'''^2 - x'x''$, $x'''^2 - x''x'$ uguali totalmente fra loro, come lo erano fra loro le $x'^2 - x''x'''$, $x'^2 - x'''x''$. Ma se le funzioni supposte, come le due $\frac{x' - x''}{x'''}$, $\frac{x' - x'''}{x''}$ sono fra loro uguali soltanto per certi particolari valori della x (N.° prec.), in allora sotto la permutazione cambiandosi la certa posizione di quelle certe determinate radici, da cui solo dipendeva l' uguaglianza, ne viene generalmente parlando, che le due nuove funzioni dovranno risultar disuguali. Cambiamo per esempio nelle $\frac{x' - x''}{x'''}$, $\frac{x' - x'''}{x''}$ la x' nella x'' lasciando la x''' al suo luogo; ne nasceranno perciò le funzioni $\frac{x'' - x'}{x'''}$, $\frac{x' - x''}{x''}$; ora mentre $x' = 10$, $x'' = 7$, $x''' = 3$, abbiamo bensì $\frac{x' - x''}{x'''} = \frac{x' - x'''}{x''}$ (N.° prec.); ma non abbiamo

 già

già $\frac{x''-x'}{x'''}=\frac{x''-x'''}{x'}$, risultando $\frac{x''-x'}{x'''}=\frac{7-10}{3}$ $=-1$, $\frac{x''-x'''}{x'}=\frac{7-3}{10}=\frac{4}{10}$.

97. Se due delle π funzioni del (N.° 93) sono per la loro forma fra loro uguali, saranno fra loro uguali a due a due anche tutte le altre.

Abbiasi la $y'=f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})\ldots(x^{(m)})$ tale, che per la sua forma sia $=y'''=f(x''')(x'')(x')(x^{\text{IV}})\ldots(x^{(m)})$. Ciò posto si eseguisca nel medesimo tempo in amendue le y', y''' un' eguale permutazione, si cangi per es. la x' in x''; ne verranno i due risultati $f(x'')(x')(x''')(x^{\text{IV}})\ldots(x^{(m)})$, $f(x''')(x')(x'')(x^{\text{IV}})\ldots(x^{(m)})$. Ora questi non sono evidentemente, che due delle π funzioni del (N.° 93), cioè le due y'', y^{VII}, e deggiono frattanto pel (N.° 96) essere uguali fra loro. Dunque lo stesso discorso facendosi, qualunque altra permutazione eseguiscasi in entrambe le y', y''', ne segue chiaramente, che tutte le permutazioni nate corrispondentemente da simili permutazioni, e perciò tutte le π funzioni del (N.° 93) dovranno essere uguali fra loro a due a due.

Se sia per es. $y'=x'+x'''-\frac{x''-x^{\text{IV}}}{x^{(m)}}$, e perciò $y'''=x'''+x'-\frac{x''-x^{\text{IV}}}{x^{(m)}}$, venendone $y''=x''+x'''-\frac{x'-x^{\text{IV}}}{x^{(m)}}$, $y^{\text{VII}}=x'''+x''-\frac{x'-x^{\text{IV}}}{x^{(m)}}$, risulterà $y''=y^{\text{VII}}$; ed eseguendo un' altra permuta-

ta-

tazione, quella per esempio di x' in x'^{v}, otterremo $y'^{v} = y^{v'''}$, e così di seguito.

98. In egual modo si dimostra, che se tre, quattro, ec. delle funzioni del (N.° 93) sono uguali tra loro per la loro forma, ancora tutte le altre saranno fra loro uguali a tre a tre, a quattro a quattro, ec.. Che se due, o più delle stesse π funzioni si uguagliano fra loro, non per la forma, ma pel valore particolare delle x (N.° 95), in tal caso è facile il vedersi dal (N.° 96), che non si verificherà il Teorema precedente, e la uguaglianza perciò non potrà, generalmente parlando, conservarsi tra le altre funzioni, che rimangono.

99. Poichè nella supposizione del (N.° 97) le π funzioni sono tutte fra loro uguali a due a due, e quindi i valori diversi della y sono di numero $\frac{\pi}{2}$, ne segue, che se nell' Equazione proposta (N.° 92) volessimo una Trasformata, la quale comprendesse le radici tutte sì uguali, che disuguali, essa bensì verrebbe del grado π (N.° 92); ma volendosi quella Trasformata, la quale non comprende, che le radici disuguali, e quella che solo a tutto rigor si ricerca, essa risulterà del grado $\frac{\pi}{4}$. Così pel (N.° 98), se la $y' = f(x')(x'')(x''')({}^{v})\ldots(x^{(*)})$ è di tal forma, che conservi sempre lo stesso valore, facendo tre, quattro, o più permutazioni diverse, la vera Trasfor-

ma-

mata diverrà del grado $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, ec.. Nell'altro caso poi del (N.° 98) è chiaro, che non possonsi avere in considerazione, che casi particolari, e che la Trasformata coll' escludersi delle radici uguali, si ridurrà al grado $\pi - 1$, $\pi - 2$, ec., secondo che due, o tre, o ec. sono i valori della y tra loro uguali.

100. Chiamiamo n il grado della Trasformata; se sia $y' = f(x', x'')(x''')(x^{\text{iv}}) \ldots (x^{(m)})$, pei (N.[i] 3, 97) ne verrà $n = \frac{\pi}{2}$. Se pongasi $y' = f(x', x'', x''')(x^{\text{iv}}) \ldots (x^{(m)})$, non cangiando la y' di valore, qualunque permutazione si faccia tra le x', x'', x''' (N.° 3), ne viene che si avranno $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ risultati della nostra funzione per la forma tra loro uguali (N.° 96), e però i valori tutti della y essendo tra loro uguali a 6 a 6 (N.° 98), la Trasformata diverrà del grado $n = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. In egual modo, se abbiasi $y' = f(x', x'', x''', x^{\text{iv}}) \ldots (x^{(m)})$, ne verrà $n = \frac{\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{\pi}{24}$ (N.[i] 3, 98). Se sia $y' = f(x', x'', x''', x^{\text{iv}}, x^{\text{v}}) \ldots (x^{(m)})$, avremo $n = \frac{\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{\pi}{120}$, e così di seguito.

101. Pertanto supponendo $y' = f(x', x'', x''', x^{\text{iv}}, x^{\text{v}}, \ldots x^{(m)})$, giacchè in

in questo caso risulta $n = \frac{\pi}{1.2.3.4.5...m} = \frac{\pi}{\pi} = 1$ (N.° 3), ne viene, che una funzione, come la proposta, di tal forma cioè che resti sempre la medesima, qualunque permutazione si faccia fra tutte le x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$, ne viene dico, che essa dipenderà da una Trasformata di primo grado, e potremo perciò determinare il suo valore col mezzo della data senza sciogliere Equazione di grado maggiore del primo.

102. Supponghiamo $y' = f(x', x'')(x''', x^{\text{iv}})$ .....$(x^{(m)})$; dovendo questa funzione rimanere la stessa, comunque si cambino fra loro le x', x'', come pure tra loro le altre x''', x^{iv}, i valori della y dovranno tutti esser uguali fra loro a $1.2.1.2$ a $1.2.1.2$, e avremo perciò corrispondentemente $n = \frac{\pi}{1.2.1.2} = \frac{\pi}{4}$. Così nella ipotesi di $y' = f(x', x'')(x''', x^{\text{iv}}, x^{\text{v}})$ .....$(x^{(m)})$, otterremo $n = \frac{\pi}{1.2.1.2.3} = \frac{\pi}{12}$; e in generale supposto $y' = f(x', x'', x''' ... x^{(a)})(x^{(a+1)}, x^{(a+2)}, x^{(a+3)}, ... x^{(a+b)})(x^{(a+b+1)}, x^{(a+b+2)}, x^{(a+b+3)} .....)$ ..., ne verrà $n = \frac{\pi}{1.2.3...a\ 1.2.3...b.1.2.3....}$

103. Sia finalmente y' uguale ad una funzione, in cui non si contengano che alcune delle radici della data, se ne contenga per es. un numero λ, cosicchè abbiasi $y' = (x')(x'')(x''')$ ....$(x^{(\lambda)})$. Sommiamo con questa tutte le altre $m - \lambda$ radici, che

che rimangono, moltiplicando ciascuna per lo zero, non alterandosi per ciò il valore della funzione proposta, otteremo $y' = f(x')(x'')(x''')\ldots\ldots(x^{(\lambda)}) + (0\,x^{(\lambda+1)} + 0\,x^{(\lambda+2)} + 0\,x^{(\lambda+3)} + \ldots + 0\,x^{(m)})$; ma questa altro non è, che una funzione della forma $y' = f(x')(x'')(x''')\ldots\ldots$
$(x^{(\lambda)})(x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, x^{(\lambda+3)}, \ldots\ldots x^{(m)})$, e tale essendo, conduce ad una Trasformata del grado $\dfrac{\pi}{1.2.3\ldots(m-\lambda)}$ (N.° 100). Dunque avendosi $\pi = 1.2.3\ldots(m-\lambda)(m-\lambda+1)(m-\lambda+2)\ldots\ldots m$, e però $\dfrac{\pi}{1.2.3\ldots\ldots(m-\lambda)} =$
$\dfrac{1.2.3\ldots(m-\lambda)(m-\lambda+1)(m-\lambda+2)\ldots m)}{1.2.3\ldots\ldots(m-\lambda.} =$
$(m-\lambda+1)(m-\lambda+2)(m-\lambda+3)\ldots\ldots m =$
$m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-(\lambda-1))$, sarà questo numero $= n$, ossia ci esprimerà il grado della Trasformata corrispondente alla supposta funzione $y' = f(x')(x'')(x''')\ldots\ldots(x^{(\lambda)})$.

104. Replicando quanto si disse ai (N.[i] 102, 103), vedesi, che qualunque funzione della forma
$f(x', x'', x''', \ldots\ldots x^{(a)})$
$(x^{(a+1)}, x^{(a+2)}), x^{(a+3)})\ldots\ldots x^{(a+b)})$
$(x^{(a+b+1)}), (x^{(a+b+2)})\ldots\ldots(x^{(\lambda)})$ ci darà una Trasformata del grado
$\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-(\lambda-1))}{1.2.3\ldots a.1.2.3\ldots b}$; e se sia

$y' =$

$y' = f(x', x'', x''', x^{\text{iv}}, \ldots x^{(\lambda)})$, avremo

$$n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(\lambda-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \lambda}.$$

105. Data l' Equazion generale $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{ec.} = 0$, trasformar questa in un' altra, di cui sia radice una qualunque funzion razionale $f(x')(x'')(x''')\ldots(x_m)$.

Supponghiamo essere $y^n + Ly^{n-1} + My^{n-2} + Ny^{n-3} + \text{ec.} = 0$ la Trasformata, che si domanda; è chiaro che avremo sciolto il Problema, ogni qualvolta avremo determinato il valore dell' esponente n, e quello dei Coefficienti L, M, N, ec.. Ora rapporto ad n, conosciuta la forma della data funzione, conosceremo immediatamente il valore di essa n col mezzo dei (N.[i] prec.); affine poi di determinare i Coefficienti, è necessario il premettere le seguenti riflessioni. Chiamate y', y'', y''', ec., $y^{(n)}$ le radici della Trasformata, poichè, fatta astrazione dai segni, L uguaglia la somma di queste, M è uguale alla somma dei loro Ambi, N è uguale a quella dei Terni, ec. (N.° 31), evidentemente avremo ciascuno di tali Coefficienti uguale ad una funzione della forma $f(y', y'', y''', \ldots y^{(n)})$. Ma ottenuti, come nel (N.° 93), i valori delle y', y'', y''', ec., se facciamo in questi tutte le permutazioni possibili tra le x', x'', x''', ec., essi pei (N.[i] prec.) non fanno che restare gli stessi, o cangiarsi gli uni negli altri; dunque nei Coefficienti L, M, N, ec. ponendo in luogo delle y', y'', y''', ec. i valori corrispondenti in x', x'', x''', ec., essi risulteranno tante funzioni di queste radici tutti della forma, $f(x', x'', x''', \ldots x^{(m)})$, e razionali. Ora noi sappiamo dal (N.° 101), che il valore delle funzioni razionali di tal forma può sempre determinarsi col mezzo della data, senza sciogliere Equazione alcuna di grado maggiore del primo. Dunque ricercando, come negli esempj, che seguono col mezzo dei (N.i 31, 35, 36, 41, 46, 49) simili valori, noi otterremo i valori dei Coefficienti L, M, N, ec., e avremo così sciolto con tutta la generalità il problema proposto.

106. Data l' Equazione di terzo grado $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, vogliasene un' altra, le cui radici siano le differenti somme delle radici della data prese a due a due.

Chiamate x', x'', x''' le radici dell' Equazione proposta, ed y' una delle radici della Trasformata, avremo per la supposizione $y' = x' + x''$. Ora questa ella è una funzione della forma $f(x', x')$; il grado adunque della Trasformata che si cerca, dovendo pel (N.° 104) essere $= \frac{3(3-(2-1))}{1 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$, giacchè $m = 3$, $\lambda = 2$, essa Trasformata diverrà $y^3 + Ly^2 + My + N = 0$, e le sue radici saranno $y' = x' + x''$, $y'' = x' + x'''$, $y''' = x'' + x'''$. Affine presentemente di determinare il valore dei Coefficienti L, M, N, ec., osservo, che abbiamo $L = -(y' + y'' + y''')$, $M = +(y'y'' + y'y''' + y''y''')$, $N = -y'y''y'''$ (N.° 31); sostituendo adunque, e rie riducendo, sarà $L = -(2x' + 2x'' + 2x''')$, $M = +(x'^2 + x''^2 + x'''^2 + 3x'x'' + 3x'x''' + 3x''x''')$, $N = -(x'^2x'' + x'x''^2 + x'^2x''' + x'x'''^2 + x''^2x''' + x''x'''^2 + 2x'x''x''')$, ossia pei (N.i 31, 34, 39) $L = -2\Sigma x$, $M = \Sigma x^2 + 3b$, $N = -(\Sigma x x^2 + 2x'x''x''')$; e finalmente pei (N.i 31, 35, 41) $L = 2a$, $M = a^2 - 2b + 3b = a^2 + b$, $N = -(3c - ab - 2c) = ab - c$. Pongo pertanto questi valori nella supposta Equazione in y, e la $y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + (ab - c) = 0$, che ne risulta, sarà la Trasformata richiesta.

Sia per esempio $x' = 1$, $x'' = 3$, $x''' = 5$, e però $a = -9$, $b = 23$, $c = -15$, ed $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ l' Equazione data. Otterremo in tal caso $2a = -18$, $a^2 + b = 104$, $ab - c = -192$, onde la Trasformata sarà $y^3 - 18y^2 + 104y - 192 = 0$, di cui le radici sono $y' = 4$, $y'' = 6$, $y''' = 8$, uguali per l' appunto alle radici della data sommate fra loro a due a due.

107. Ritenuta l' Equazione istessa del (N.° prec.), un' altra se ne voglia, di cui sia radice la funzione del (N.° 96) $x'^2 - x''x'''$.

Essendo la proposta funzione della forma $f(x')(x'', x''')$, avremo pel (N.° 100) $n = +\frac{1.2.3}{2} = 3$, ed $y^3 + Ly^2 + My + N = 0$ la Trasformata, di cui $y' = x'^2 - x''x'''$, $y'' = x''^2 - x'x'''$, $y''' = x'''^2 - x'x''$ saran le radici. Ora sostituisco nei valori dei Coefficienti $L = -(y' + y'' + y''')$, $M = +(y'y'' + y'y''' + y''y''')$, $N = -y'y''y'''$ i valori espressi col mezzo delle x', x'', x''', e riducendo avremo

$$L = -(x'^2 + x''^2 + x'''^2 - (x'x'' + x'x''' + x''x'''))$$
$$= -\Sigma x^2 + b,$$
$$M = +(x'^2 x''^2 + x'^2 x'''^2 + x''^2 x'''^2 - (x'^3 x'' + x' x''^3 + x'^3 x''' + x' x'''^3 + x''^3 x''' + x'' x'''^3)$$
$$+ (x'^2 x'' x''' + x' x''^2 x''' + x' x'' x'''^2))$$
$$= \Sigma \overline{x\,x}^2 - \Sigma x^3 x + \Sigma x (x' x'' x'''),$$
$$N = +(x'^3 x''^3 + x'^3 x'''^3 + x''^3 x'''^3)$$
$$-(x'^4 x'' x''' + x' x''^4 x''' + x' x'' x'''^4) = \Sigma \overline{x\,x}^3$$

$-\Sigma x^3 (x' x'' x''')$. Ricavo dai (N.i 41, 47) i valori corrispondenti, e ottenendosi $L = b - \Sigma x^2$,

$$M = \frac{\Sigma x^2\, \Sigma x^2 - \Sigma x^4}{2} - \Sigma x^3\, \Sigma x + \Sigma x^4 + a\,c,$$

$$N = \frac{\Sigma x^3\, \Sigma x^3 - \Sigma x^6}{2} + c\,\Sigma x^3,$$ istituito il calcolo, ne verrà $L = 3b - a^2$, $M = 3b^2 - a^2 b$, $N = b^3 - a^3 c$, e finalmente $y^3 + (3b - a^2)y^2 + (3b^2 - a^2 b)y + (b^3 - a^3 c) = 0$.

Dalla precedente $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ ricavandosi $3b - a^2 = -12$, $3b^2 - a^2 b = -276$, $b^3 - a^3 c = 1232$, la Trasformata corrispondente sarà $y^3 - 12y^2 - 276y + 1232 = 0$, e le radici di questa $y' = -14$, $y'' = 4$, $y''' = 22$ uguagliano appunto le tre funzioni $x'^2 - x''x'''$, $x''^2 - x'x'''$, $x'''^2 - x'x''$, avendosi $x' = 1$, $x'' = 3$, $x''' = 5$ (N.° prec.).

108.

108. Ridurre la Equazione $z^3 + dz^2 + ez + f = 0$ ad un' altra, le radici della quale siano le differenze a due a due delle radici della data.

Affine di facilitare il calcolo, supponiamo $z = x - \frac{d}{3}$, riduco l' Equazione data ad un' altra priva del Coefficiente del secondo termine, e da questa deduco immediatamente la Trasformata. Chiamata essa $x^3 + bx^2 + c = 0$, avendosi $z' = x' - \frac{d}{3}$, $z'' = x'' - \frac{d}{3}$, $z''' = x''' - \frac{d}{3}$, ripongo nella funzione $z' - z''$, che per la ipotesi ci esprime una delle radici della richiesta Equazione Trasformata, ripongo, dissi, i valori corrispondenti in x; risultando da ciò $z' - z'' = x' - \frac{d}{3} - x'' + \frac{d}{3} = x' - x''$, faccio, come precedentemente (N.[i] 105, 106, 107), su questa $x' - x''$ i raziocinii dovuti, e il calcolo opportuno. Essendo essa una funzione della forma $f(x')(x'')$, a cagione di $m = 3$, $\lambda = 2$, ne verrà $n = 3 . 2 = 6$ (N.° 103), e quindi la Trasformata $y^6 + Ly^5 + My^4 + Ny^3 + Py^2 + Qy + R = 0$. Ora essendo $y' = x' - x''$, e però $y'' = x'' - x'$, $y''' = x' - x'''$, $y^{IV} = x''' - x'$, $y^{V} = x'' - x'''$, $y^{VI} = x''' - x''$, colloco questi valori delle radici nei Coefficienti $L = -(y' + y'' + y''' + y^{IV} + \text{ec.})$, $M = +(y'y'' + y'y''' + y'y^{IV} + \text{ec.})$, ec., e fatte le riduzioni, poichè ci risulta $L = 0$, $M = -\Sigma x^2 + 2\Sigma\overline{x\,x^1}$, $N = 0$, $P = \Sigma x^4 - 2\Sigma\overline{x\,x^3} + 3\Sigma\overline{x\,x}^2$, $Q = 0$,

$R =$

$R = -\Sigma x^4 x^2 + 2\Sigma \overline{x x}^3 - 2\Sigma x^3 x^2 x +$ $2\Sigma x^4 \overline{x x}^2 + \Sigma \overline{x x x}^2$, col mezzo dei (N.[i] 31, 41, 47) otterremo
$M = 2b - \Sigma x^2$, $P = (3\Sigma x^4 - 4\Sigma x \Sigma x^3 + 3\Sigma x^2 \Sigma x^2)$,
$R = (\Sigma x^4 \Sigma x^2 - 8\Sigma x^6 + 6\Sigma x^3 \Sigma x^3 -$ $4\Sigma x^3 \Sigma x^2 \Sigma x + \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x + 4c^2)$. Ciò ritrovato ricorro ai Teoremi Newtoniani (N.° 35), e a cagione del Coefficiente del secondo termine $=$ zero, avendosi $\Sigma x = 0$, $\Sigma x^2 = -2b$, $\Sigma x^3 = -3c$, $\Sigma x^4 = 2b^2$, $\Sigma x^5 = 5bc$, $\Sigma x^6 = 3c^2 - 2b^3$, colla sostituzione ci risulterà $M = 4b$, $P = 9b^2$, $R = 6b^3 + 17c^2$; e però $y^6 + 4by^4 + 9b^2y^2 + (6b^3 + 17c^2) = 0$ sarà la Trasformata, che proviene dall' Equazione in x. Ora per cagione di $z = x - \frac{d}{3}$, abbiamo $b = e - \frac{d}{3}$,

$c = f - \frac{ed}{3} + \frac{2d^3}{27}$; sostituendo adunque otterremo

$$y^6 + 4\left(e - \frac{d}{3}\right)y^4 + 9\left(e - \frac{d}{3}\right)^2 y^2 +$$

$$\left(6\left(e - \frac{d}{3}\right)^3 + 17\left(f - \frac{ed}{3} + \frac{2d^3}{27}\right)^2\right) = 0,$$ e questa sarà finalmente la Trasformata risultante dalla proposta $z^3 + dz^2 + ez + f = 0$.

109. Nel modo medesimo dei (N.[i] prec.), e con le regole accennate potremo eseguire presentemente una qualunque trasformazione, mentre però la data $f(x')(x'')(x''')\ldots\ldots\ldots(x^{(m)})$ sia una funzione razionale. Nei casi particolari, come in quello del (N.° prec.), e come in quei

tut-

tutti del (Capo prec.), nei quali il rapporto fra le radici della Trasformata, e quella della proposta è assai semplice, potremo talvolta con particolari artifizii agevolare il calcolo, d' altronde il più delle volte brigoso, mentre l' Equazione data sia di grado superiore, e la data funzione sia complicata.

CAPO SESTO.

Della Eliminazione, e del Modo di togliere i Radicali da una data Equazione.

110. Sappiamo dall' Algebra cosa intender si debba col come di Eliminazione di una, o più incognite da due, o più date Equazioni, e allora quando l' Equazioni sono di primo grado, suppongo noto dall' Algebra, come eseguiscasi una simile operazione. Passeremo ora ad esporre, come essa medesima si faccia nelle Equazioni Algebraiche di grado superiore; prima però di far questo, amiamo di accennare un altro metodo assai elegante, oltre gli esposti comunemente nell' Algebra, onde eliminare le incognite nelle Equazioni di primo grado.

111. Vengano proposte le due Equazioni $ax + by + c = 0$, $fx + gy + h = 0$, onde esporre su di esse questo metodo di eliminare.

Mol-

Moltiplico a tal fine la seconda di simili Equazioni per una quantità da determinarsi M, e poscia la sommo con la prima; ci risulterà così una terza Equazione $(fM+a)x+(gM+b)y+(bM+c)=o$, in cui la quantità M può determinarsi ad arbitrio. Determiniamola pertanto in maniera, che abbiasi $fM+a=o$; dovrà perciò essere $M=-\frac{a}{f}$, e la nostra Equazione diverrà $(gM+b)y+(bM+c)=o$, ossia sostituendo, $(b-\frac{ag}{f})y+(c-\frac{ab}{f})=o$, Equazione, da cui si è già eliminata la x. Che se si voglia eliminare la y, cerco di determinare la M per modo, che divenga zero il coefficiente della y, e suppongo a tal fine $gM+b=o$; ricavandosi da ciò $M=-\frac{b}{g}$, riduco la nostra Equazione alla $(fM+a)x+(bM+c)=o$, sostituisco in luogo di M il valor ritrovato, e l' Equazione $(a-\frac{bf}{g})x+(c-\frac{bb}{g})=o$ quella sarà, che risulta dalla eliminazione della y.

112. Eliminare due qualsivogliano delle incognite dalle tre Equazioni

$$ax+by+cz+d=o,$$
$$fx+gy+bz+i=o,$$
$$mx+ny+pz+q=o.$$

Moltiplicata la seconda di queste per un indeterminata M, e la terza per un altra N, le sommo mo insieme, e mi risulta così l' Equazione $(a+fM+mN)x+(b+gM+nN)y$ $+(c+hM+pN)z+(d+iM+qN)=0$. Volendo ora eliminare la x, e la y, suppongo $a+fM+mN=0$, $b+gM+nN=0$, determino da queste Equazioni i valori corrispondenti di M, e di N (N.° prec.), li sostituisco, e l' Equazione $(c+hM+pN)z+(d+iM+qN)$ $=0$, ossia $\left(\frac{c+h(an-bm)+p(bf-ag)}{gm-fn}\right)z$ $+\left(\frac{d+i(an-bm)+q(bf-ag)}{gm-fn}\right)=0$, essendo priva delle x, y, sarà la richiesta. Se fosse stato domandato di eliminare le x, z, avrei supposto $a+fM+mN=0$, $c+hM+pN=0$, onde mi risultasse l' Equazione $(b+gM+nN)y$ $+(d+iM+qN)=0$, e quindi avrei determinati pel (N.° prec.), e poscia sostituiti i valori corrispondenti di M, e di N. Finalmente volendo, che sussista la sola x, supporrò $b+gM$ $+mN=0$, $c+hM+pN=0$, e poi proseguirò il calcolo, come precedentemente.

113. Se le Equazioni date sono quattro con quattro incognite al primo grado, e vogliasi una quinta Equazione con un' incognita sola, moltiplico le tre ultime delle Equazioni date per le indeterminate M, N, P, in seguito sommo, come nei (N.[i] 111, 112), tutte e quattro le Equazioni insieme, prendo nella Equazion, che risulta, i coefficienti delle tre incognite, che voglionsi

 eli-

eliminare, li uguaglio allo zero, determino quindi pel (N.° prec.) i valori di M, N, P, li sostituisco, e l' Equazione, che finalmente me ne risulta, non contenendo che un incognita sola, quella sarà, che domandavasi.

Qualunque sia il numero delle Equazioni, e qualunque quello delle incognite, col metodo accennato potremo sempre ottenere la chiesta eliminazione, purchè le incognite montino solamente al primo grado; che se esse lo superano, conviene ricorrere ad altro metodo, qual' è il seguente.

114. Date le due Equazioni

$$A y^m + B y^{m-1} + C y^{m-2} + D y^{m-3} + \text{ec.} = 0,$$
$$a y^n + b y^{n-1} + c y^{n-2} + d y^{n-3} + \text{ec.} = 0,$$

nelle quali i coefficienti A, B, C, ec.; a, b, c, ec. non sono, che tante funzioni della x, eliminare dalle medesime l' incognita y.

Prima d' intraprendere l' operazione conviene distinguere due casi principalmente; o $m = n$, o $m > n$. Sia primieramente $m = n$, ed

$$A y^m + B y^{m-1} + C y^{m-2} + D y^{m-3} + \text{ec.} = 0,$$
$$a y^m + b y^{m-1} + c y^{m-2} + d y^{m-3} + \text{ec.} = 0$$

siano le due Equazioni date.

In questa ipotesi comincisi dal moltiplicare la seconda Equazione per A, sottraggasi dalla prima moltiplicata per a, e ne risulterà una terza, nella quale il massimo esponente sarà $m - 1$. Di nuovo si moltiplichi la seconda delle Equazioni proposte per A x + B, si sottragga dall' altra molti-

pli-

plicata per $ax+b$, e ne nascerà una quarta, in cui $m-1$ esprimerà il massimo esponente. In simil modo moltiplicata la seconda Equazione per Ax^2+Bx+C, e sottratta dall' altra moltiplicata per ax^2+bx+c, ne avrò una quinta parimenti del grado $m-1$. Se continuerò la stessa operazione, adoperando successivamente i moltiplicatori Ax^3+Bx^2+Cx+D, ax^3+bx^2+cx+d; $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, ec., finchè essi moltiplicatori divengano del grado $m-1$; è visibile, che oltre le due proposte, otterremo un numero m di Equazioni, ciascuna della forma $\alpha y^{m-1}+\beta y^{m-2}+\gamma y^{m-3}+$ ec. $=0$, e in ciascuna delle quali non si conterranno che le prime $m-1$ potenze della y. Ora se si considerano tutte queste potenze, come tante incognite differenti del primo grado, abbiamo un numero $m-1$ d' incognite, ed un numero m di Equazioni. Dunque coi semplici metodi della Eliminazione dell' incognite al primo grado (N.[i] 111, 112, 113) potremo da queste ottenere una Equazione finale, in cui manchi totalmente la y, come chiedevasi dal Problema.

115. Siano per esempio

$$xy^3-2x^2y^2+7xy+x^3-8=0,$$
$$5y^3+6xy^2-5y+3x^2-6x=0$$

le due Equazioni date. Ridotte esse alle due

$$Ay^3+By^2+Cy+D=0,$$
$$ay^3+by^2+cy+d=0,$$

dopo aver supposto $A=x$, $B=-2x^2$, $C=7x$, $D=x^3$

$D = x^3 - 8$, $a = 5$, $b = 6x$, $c = -5$, $d = 3x^2 - 6x$, moltiplico la prima per a, la seconda per A, sottraggo i due risultati

$$Aay^3 + Bay^2 + Cay + Da = 0$$

$$Aay^3 + bAy^2 + cAy + dA = 0,$$ e ritengo l' avanzo $(Ba - bA)y^2 + (Ca - cA)y + (Da - dA) = 0$.

Fatta in seguito la moltiplicazione delle due Equazioni date per $ay + b$, $Ay + B$, e avute le due

$$Aay^4 + (Ba + Ab)y^3 + (Ca + Bb)y^2 + (Da + Cb)y + Db = 0,$$

$$Aay^4 + (Ba + Ab)y^3 + (Ac + Bb)y^2 + (Ad + Bc)y + Bd = 0,$$

sottraggo la seconda dalla prima, onde avere

$$(Ca - Ac)y^2 + (Da - Ad + Cb - Bc)y + (Db - Bd) = 0.$$

Moltiplico finalmente per $ay^2 + by + c$, $Ay^2 + By + C$, ed ottengo

$$Aay^5 + (Ba + Ab)y^4 + (Ac + Bb + Ca)y^3 + (Da + Cb + Bc)y^2 + (Db + Cc)y + Dc = 0,$$

$$Aay^5 + (Ba + Ab)y^4 + (Ac + Bb + Ca)y^3 + (Ad + Cb + Bc)y^2 + (Bd + Cc)y + Cd = 0;$$

sottraggo come sopra, e ne verrà

$$(Da - Ad)y^2 + (Db - Bd)y + (Dc - Cd) = 0.$$

Suppongo presentemente $Ba - bA = f$, $Ca - cA = g$, $Da - dA = h$, $Cb - cB = i$, $Db - Bd = k$, $Dc - dC = l$, $y^2 = z$, sostituisco nelle tre Equazioni ottenute dalle sottrazioni, e avuti i risultati

$$fz + gy + h = 0,$$
$$gz + (h + i)y + k = 0,$$
$$hz + ky + l = 0,$$

elimino da questi la z, e la y; li riduco pertanto pel (N.° 112) alla $(f + gP + hQ)z + (g + (h + i)P + kQ)y + (h + kP + lQ) = 0$, suppongo $f + gP + hQ = 0$, $g + (h + i)P + kQ = 0$, ritrovo quindi pel (N.° 111) $P = \frac{gh - fk}{gk - h^2 - ih}$, $Q = \frac{fh + fi - g^2}{gk - h^2 - ih}$; sostituisco questi valori nella $h + kP + lQ = 0$, e l'Equazione

$$h + \frac{ghk - fk^2 + fhl + fil - g^2 l}{gk - h^2 - ih} = 0\text{, ossia}$$

$$h^3 + ih^2 - 2gkh - flh + fk^2 - fil + g^2 l = 0$$

mancante affatto di qualunque incognita, fuorchè della x contenuta entro le quantità fg, ec., sarà essa l'Equazione richiesta dall' eliminazione. Per compiere ora il calcolo, non avremo che a porre in luogo della f, g, h, ec. i suoi valori $Ba - bA$, $Ca - cA$, $Da - dA$, ec., e finalmente in luogo delle A, a, B, b, ec., i valori x, 5, $-2x^2$, $6x$, ec.

116. Supponghiamo in secondo luogo $m > n$ (N.° 114), e sia $n = m - p$, cosicchè le due Equazioni date divengano

$$Ay^m + By^{m-1} + Cy^{m-2} + Dy^{m-3} + \text{ec.} = 0$$
$$ay^{m-p} + by^{m-p-1} + cy^{m-p-2} + dy^{m-p-3} + \text{ec.} = 0.$$

Moltiplico in questo caso la prima Equazione per a, e la seconda per Ay^p, onde fatta la sottratrazione di questa da quella, un' altra ne derivi, in cui il massimo esponente sia $m-1$. Moltiplicata di nuovo la seconda delle nostre Equazioni per $Ay^{p+1}+By^{p}$, sottraggasi dalla prima moltiplicata per $ay+b$, e ne avremo una quarta del grado $m-1$. Ottenute così, oltre le due date, altre due Equazioni, sostituiscasi in esse il valore y^{m-p} ricavato dalla $ay^{m-p}+by^{m-p-1}+cy^{m-p-2}+ec.=0$ in tutti i termini, che contengono delle potenze maggiori di y^{m-p-1}; e per tale sostituzione ridotte avremo amendue quest' ultime Equazioni ad uno stesso grado $m-p-1$. Applico pertanto su di esse il metodo di eliminazione del (N.° 114), e l' ultima Equazion, che risulta, priva della y sarà la richiesta.

117. Supposto $m=3$, $n=2$, $p=1$, siano per esempio

$$3y^3-6xy^2+(5q^2+x^2)y-6x^3=0,$$
$$xy^2+6xy-8x^3+q^3=0$$

le due Equazioni date. Ridotte queste, come nel (N.° 115), alle due

$$Ay^3+By^2+Cy+D=0,$$
$$ay^2+by+c=0,$$

moltiplico, come quì sotto, in primo luogo la prima di esse per a, la seconda per Ay; secondariamente la prima per $ay+b$, la seconda per Ay^2+By, sottraggo, e avuti i risultati

$$(Ba-bA)y^2+(Ca-cA)y+Da=0,$$
$$(Ca-cA)y^2+(Da+Cb-cB)y+Db=0,$$

sostituisco in essi, ovunque si può in luogo di y^2 il suo il suo valore $-\frac{by+c}{a}$ ricavato dalla seconda delle Equazioni date, ne verranno così le due

$$(Ab^2+Ca^2-Aac-Bba)y+(Da^2+Abc-Bac)=0,$$

$$(Abc-Bac+Da^2)y+(Ac^2-Cac+Dab)=0,$$

nelle quali la y non monta che al primo grado, e dalle quali per conseguenza eliminata quest' incognita, ne verrà la

$$(Da^2+Abc-Bac)(Abc-Bac+Da^2)+(Cac-Ac^2-Dab)(Ab^2+Ca^2-Aac-Bba)$$

$=0$, Equazione priva affatto della y, e in cui per conseguenza non dovremo più che sostituire in luogo delle lettere A, a, B, b, ec. i valori corrispondenti, ed eseguire le multiplicazioni accennate

$$Aay^3+Bay^2+Cay+Da=0$$
$$Aay^3+bAy^2+cAy=0$$

$$*\ (Ba-bA)y^2+(Ca-cA)y+Da=0,$$

$$Aay^4+(Ba+bA)y^3+(Ca+Bb)y^2+(Da+Cb)y+Db=0$$
$$Aay^4+(Ba+bA)y^3+(cA+Bb)y^2+cBy=0$$

$$*\quad *\quad (Ca-cA)y^2+(Da+Cb-cB)y+Db=0.$$

118. Varii altri metodi potrebbero esporsi di eliminazione; noi però oltre il precedente, non n' esporremo che un altro nel Capo, che segue, e ciò, perchè è quello, che con tutta esattezza ci di-

dimostra, e ci dà il grado, a cui deve ascendere propriamente l' Equazione risultante dalla Eliminazione. Nei casi particolari poi alcuni metodi particolari, e alcuni artifizii non di rado si presentano, per cui, deviando dal metodo generale, si può di molto facilitare il calcolo; di questo ne vedremo un esempio nel (N.° 122).

119. Potrebbe il numero delle Equazioni date esser maggiore di due, ed altrettante esser l' incognite. Volendosi in questa supposizione un' Equazione con un' incognita sola; supposto k il numero delle Equazioni, e così quello delle incognite, facciasi da prima col metodo precedente scomparire una di queste da tutte le Equazioni date, combinandole a due a due per modo, che ci risulti un numero $k-1$ di Equazioni con altrettante incognite. In seguito da queste $k-1$ Equazioni ottenute facciasi nel modo istesso svanire una seconda incognita, riducendosi in tal guisa sì le incognite, che le Equazioni ad un numero $k-2$. Proseguo nella maniera medesima ad operare su queste $k-2$ Equazioni, onde ridurle al numero $k-3$ con $k-3$ incognite. Finalmente seguitando sempre ad operare nello stesso modo, e facendo così di mano in mano scemare di uno per volta sì il numero delle Equazioni, che quello delle incognite, è chiaro che per tal modo ci ridurremo ad una Equazione finale con un' incognita sola, come era stato domandato dal Problema.

120. Grande è l' uso della Eliminazione per

la sola soluzione dei Problemi pratici, come si è veduto in tutto il decorso dell' Algebra; ma essa serve pur anche assai bene per la soluzione del Problema seguente.

121. Data un' Equazione, che contenga dei radicali, liberarla da questi.

Suppongasi ciascun radicale contenuto nell' Equazione proposta uguale ad una nuova incognita; e quanti sono i radicali, tante nuove Equazioni quindi nasceranno, le quali non avendo che due termini per cadauna, potranno sempre liberarsi dalla irrazionalità con elevarle alle dovute potenze; ciò fatto, e sostituite nella Equazion data in luogo dei radicali le indeterminate corrispondenti, onde convertire anche questa in una Equazion razionale, avremo così tante Equazioni razionali più una, quanti sono i radicali supposti, e quante sono le nuove incognite. Eliminate dunque col metodo insegnato tutte queste incognite, giungeremo ad un' Equazione priva delle medesime, e priva per conseguenza dei radicali, la quale altro non sarà, che l' Equazione data resa razionale.

122. Se per esempio $y = \sqrt[3]{a} - \sqrt{x}$ sia l' Equazione data, supposto $\sqrt[3]{a} = z$, $\sqrt{x} = u$, avremo le tre Equazioni razionali $a = z^3$, $x = u^2$, $y = z - u$, dall' ultima delle quali avendosi $z = y + u$, sostituito questo valore nella prima, essa diverrà $a = (y + u)^3$, ossia $a = y^3 + 3y^2u + 3yu^2 + u^3$;

$+u^3$, ma $u^2=x$; dunque sostituendo avremo $a=y^3+3y^2u+3yx+xu=y^3+3yx+(3y^2+x)u$, e però $u=\frac{a-y^3-3yx}{3y^2+x}$; onde finalmente sarà $x=\left(\frac{a-y^3-3yx}{3y^2+x}\right)^2$, Equazione, come si vede, tra le x, y, a, la quale, essendo identica con la $y=\sqrt[3]{a}-\sqrt{x}$, più non contiene radicali. Il metodo ora praticato, onde eliminare le z, u dalle $a=z^3$, $x=u$, $y=z-u$, vedesi che fa verificare quanto si disse sull' ultimo del (N.° 118).

123. Acchè, tolti i radicali dall' Equazione data, elevasi essa di grado, cosicchè per esempio la y, che nella $y=\sqrt[3]{a}-\sqrt{x}$ (N.° prec.) è al primo grado, nella $x=\left(\frac{a-y^3-3xy}{3y^2+x}\right)^2$ ascende al sesto?

Conosceremo la ragione di questo osservando, che i radicali sono sempre essenzialmente tante funzioni multiformi (N. 6), e osservando, che tutti i loro valori devono contenersi implicitamente (N. 5) nell' ultima Equazion razionale, che ci risulta. Il proposto esempio ci rischiarerà la cosa. Essendo $\sqrt[3]{a}$ una funzione triplice della a, e $\sqrt{x}$ una funzion doppia della x, ossia avendo la radice terza di a tre valori, la radice seconda di x avendone due, dalla combinazione di questi con quelli ne viene, che la quantità $\sqrt[3]{a}-\sqrt{x}$, e però

però la y avrà propriamente sei valori diversi. Ma l' Equazione razionale $x = \left(\frac{a - y^3 - 3xy}{3y^2 + x}\right)^2$ è chiaro altro non essere infine, che l' Equazione completa in y, di cui essendo radice in tutta la sua estensione la $\sqrt[3]{a - \sqrt{x}}$, vengono perciò ad esser radici tutti sei i valori di questa funzione. Tale Equazione adunque dovrà risultare del sesto grado. Un raziocinio simile a questo potremo sempre applicarlo a tutti gli altri casi.

CAPO SETTIMO.

Altro Metodo di Eliminazione, e della Trasformazione Relativa alle Funzioni Irrazionali.

124. Essendo

$$Ay^m + By^{m-1} + Cy^{m-2} + Dy^{m-3} + \text{ec.} = 0,$$
$$ay^n + by^{n-1} + cy^{n-2} + dy^{n-3} + \text{ec.} = 0$$

le due Equazioni date, quali le abbiamo supposte al (N.° 114), chiamiamo per semplicità di scrivere $P = 0$ la prima, $Q = 0$ la seconda; ma prima d' intraprendere ad eliminare da esse la y, riflettiamo 1.° che l' operazione della eliminazione non può eseguirsi, se non nella supposizione, che il valor della x, e della y sia lo stesso in amendue le $P = 0$, $Q = 0$, e però che determinata con l' elil' eliminazione l' Equazione con la sola x, le radici di questa sostituite in amendue le $P=0$, $Q=0$ devono darci per y un valore medesimo; 2.° che la determinazione di questa Equazione in x viene richiesta, senza che si conosca il valore delle radici della $P=0$, $Q=0$, e senza che si ricorra alla soluzione di alcuna Equazione di grado maggiore del primo.

125. L' Equazione di Eliminazione deve uguagliare il prodotto dei risultati, che si ànno dal primo Membro della $P=0$, sostituendo in essa successivamente i valori della y ricavati dalla $Q=0$.

Chiamati y', y'', y''', y^{IV}, ec., $y^{(n)}$ questi valori, sostituisco il primo di loro nella $P=0$; essa diverrà perciò un' Equazione contenente la sola x, e che supporrò $P'=0$; siano α, β, γ, ec. le radici di quest' ultima Equazione, se ciascuna di esse si sostituirà nelle $P=0$, $Q=0$, dovranno queste divenire due Equazioni in y aventi una stessa radice comune y' (1.° N.° prec.). Pongasi in secondo luogo nella $P=0$ invece della y la y'', e chiamata $P''=0$ l' Equazione con la sola x, che ne proviene, siano α', β', γ', ec. le sue radici; cadauna di queste collocate in luogo di x nelle $P=0$, $Q=0$ ci darà due Equazioni dotate della comune radice y''. Così proseguendo a sostituire nella $P=0$ i valori y''', y^{IV}, ec., ci verranno tante Equazioni $P'''=0$, $P^{\text{IV}}=0$, ec. in x, le cui radici α'', β'', γ'', ec.; α''', β''', γ''', ec. sostituite nelle $P=0$, $Q=0$ ci daranno corrisponpondentemente tante Equazioni, di cui saranno radici comuni le y''', y^{v}, ec.. Ciò posto, che cerchiam noi con la Eliminazione? non altro di certo pel (1.° N.° prec.), se non quella Equazione in x, di cui siano radici tutte le quantità α, β, γ, ec; α', β', γ', ec.; α'', β'', γ'', ec., ec. Ora pel (N.° 22) avendosi

$$P' = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots,$$
$$P'' = (x-\alpha')(x-\beta')(x-\gamma')\ldots,$$
$$P''' = (x-\alpha'')(x-\beta'')(x-\gamma'')\ldots,$$
$$P^{\text{v}} = (x-\alpha''')(x-\beta''')(x-\gamma''')\ldots, \text{ec.},$$

ne viene

$$\begin{aligned} P'\,P''\,P'''\,P^{\text{v}}\ldots = {} & (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots \\ & (x-\alpha')(x-\beta')(x-\gamma')\ldots \\ & (x-\alpha'')(x-\beta'')(x-\gamma'')\ldots \\ & (x-\alpha''')(x-\beta''')(x-\gamma''')\ldots \end{aligned}$$

Dunque l' Equazione $P'\,P''\,P'''\,P^{\text{v}}\ldots = 0$ quella essendo, che à per radici tutte le sovraccennate quantità α, β, ec. (N.° 22), essa sarà l' Equazione proveniente dalla Eliminazione. C. *d*. *d*.

126. Nascendo P' per la sostituzione in P di y', P'' per la sostituzione in P di y'', e così di seguito (N.° prec.), ne viene, che il prodotto $P'\,P''\,P'''\,P^{\text{v}}\ldots$ dovrà essere una funzione delle y', y'', y''', y^{v}, ec., ed una funzione della forma $f(y', y'', y''', y^{\text{v}}\ldots)$, dimostrandosi ciò facilmente con lo stesso raziocinio del (N.° 105). Dunque pel (N.° 101) essendo sempre una simile funzione determinabile col mezzo dei coefficienti dell' Equazione, da cui dipendono le y', y'', y''', ec., sen-

senza che si debba risolvere Equazione alcuna di grado maggiore del primo, ne segue, che la quantità $P' P'' P''' P^{\text{v}} \ldots\ldots$ potrà sempre per tal modo determinarsi col mezzo dei coefficienti della $Q = o$.

127. Eliminare la y dalle due

$$A y^m + B y^{m-1} + C y^{m-2} + \text{ec.} = P = o,$$
$$a y^n + b y^{n-1} + c y^{n-2} + \text{ec.} = Q = o.$$

Poichè ritenute le denominazioni precedenti, l' Equazione $P' P'' P''' P^{\text{v}} \ldots\ldots = o$ quella si è, che deve nascere dalla Eliminazione (N.° 125), e poichè il primo Membro di questa Equazione pel (N.° prec.) è sempre determinabile, senza ricorrere alla soluzione di alcuna Equazione di grado superiore, come veniva difatti richiesto dal (2.° N.° 124), comincio dal sostituire nella prima Equazione $P = o$ le quantità indeterminate $y', y'', y''', y^{\text{v}}$, ec., moltiplico insieme gli n risultati $P', P'', P''', P^{\text{v}}$, ec.; dal Prodotto $P' P'' P''' P^{\text{v}} \ldots$, operando come nel (N.° 105), escludo le $y', y'', y''', y^{\text{v}}$, ec., introducendovi i coefficienti a, b, c, ec., e il risultato, che dopo tutto ciò ne proviene, uguagliato allo zero formerà l' Equazion domandata.

128. Siano per esempio

$A y^3 + B y^2 + C y + D = o$, $a y^2 + b y + c = o$ le due Equazioni date, i coefficienti A, a, B, b, ec. delle quali siano funzioni qualsivogliano delle x. Volendosi da queste eliminare la y, sostituisco nella prima le quantità y', y'' considerate come radici della seconda, moltiplico fra loro i due ri-

risultati $Ay'^3+By'^2+Cy'+D$,
$Ay''^3+By''^2+Cy''+D$, e avremo il prodotto
$A^2y'^3y''^3+AB(y'^2y''^3+y'^3y''^2)+AC(y'y''^3+y'^3y'')+AD(y'^3+y''^3)+B^2y'^2y''^2+BC(y'y''^2+y'^2y'')+BD(y'^2+y''^2)+C^2y'y''+CD(y'+y'')+D^2=A^2(y'y'')^3+AB\Sigma y^2y^3+AC\Sigma yy^3+AD\Sigma y^3+B^2(y'y'')^2+BC\Sigma yy^2+BD\Sigma y^2+C^2y'y''+CD\Sigma y+D^2$.
Ma pei (N.i 31, 35, 41) abbiamo
$y'y''=\frac{c}{a}$, $\Sigma y=-\frac{b}{a}$, $\Sigma y^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$,
$\Sigma y^3=\frac{3abc-b^3}{a^3}$, $\Sigma yy^2=-\frac{bc}{a^2}$,
$\Sigma yy^3=\frac{b^2c-2ac^2}{a^3}$, $\Sigma y^2y^3=-\frac{bc^2}{a^3}$. Dunque sostituendo, riducendo, ed uguagliando allo zero, otterremo $A^2c^3-ABbc^2+ACb^2c-2ACac^2+3ADabc-ADb^3+B^2ac^2-BCabc+BDab^2-2BDa^2c+C^2a^2c-CDa^2b+D^2a^3=0$, e questa sarà l'Equazione proveniente dalla Eliminazione.

129. Ciascun termine della Equazione di Eliminazione deve esser formato dai coefficienti A, a, B, b, C, c, ec. delle Equazioni date $P=0$, $Q=0$ elevati insieme ad un numero $m+n$ di dimensioni.

Invece di supporre risolta nel (N.° 125) l'Equazione $Q=0$, e di supporre collocate successivamente nel primo membro della $P=0$ invece della y le sue n radici, potevamo viceversa suppor-porre risolta la $P=o$, e collocate nella $Q=o$ in luogo della y le m radici di questa; in allora replicato lo stesso discorso del (N.° 125), avrebbesi ritrovato nella maniera medesima, che il primo membro della Equazione di Eliminazione deve esser uguale al prodotto delle m quantità Q', Q'', Q''', ec. $Q^{(m)}$; ma questo primo membro è anche uguale al prodotto delle n quantità P', P'', P''', ec., $P^{(n)}$ (N.° 125); dunque verrà esso primo membro rappresentato tanto da $P'\,P''\,P'''\ldots\ldots P^{(n)}$, come da $Q'\,Q''\,Q'''\ldots\ldots Q^{(m)}$. Ora nel risultato $P'\,P''\,P'''\ldots\ldots P^{(n)}$ è chiaro, che i coefficienti della $P=o$ devono dapertutto formare dei prodotti di tante dimensioni, quanti sono i fattori P', P'', P''', ec., $P^{(n)}$, cioè un numero n; e nell' altro $Q'\,Q''\,Q'''\ldots\ldots Q^{(m)}$ deggiono i coefficienti della $Q=o$ formare dei prodotti di tante dimensioni, quante sono le quantità Q', Q'', Q''', ec., $Q^{(m)}$, cioè un numero m. Dunque il primo membro dell' Equazione di Eliminazone dovendo in tutti i suoi termini contenere insieme i coefficienti della $P=o$ ad n dimensioni, e i coefficienti della $Q=o$ ad m dimensioni, dovrà evidentemente contenere sì gli uni, che gli altri coefficienti considerati insieme alle dimensioni $m+n$. C. *d*. *d*.

Così nell' esempio del (N.° prec.) l' Equazione di eliminazione contiene i coefficienti della prima Equazione data a 2 dimensioni, quei della seconda a 3 dimensioni, e ciascun termine poi in totale viene ad essere di $3+2=5$ dimensioni.

130.

130. Espresso col numero b il massimo esponente della x contenuta entro i coefficienti A, B, C, ec. della $P=0$, espresso con k l' esponente massimo della x nei coefficienti a, b, c, ec. della $Q=0$, io dico, che il grado dell' Equazione di Eliminazione non può mai superare il numero $bn+km$.

Questa è una chiara conseguenza del (N.° prec.). Imperciocchè essendo nell' Equazione di Eliminazione i coefficienti A, B, C, ec. uniti fra loro ad n dimensioni, non potrà in essi contenersi la x ad un grado maggiore di bn; così i coefficienti a, b, c, ec. venendo a combinarsi fra loro ad m dimensioni, la x in questi ascenderà al più ad un grado km. Moltiplicando adunque, come si vede effettuarsi nella Equazione di Eliminazione, i risultati, che si ànno nell' operazione dai coefficienti A, B, C, ec. con i risultati, che si ànno dagli altri a, b, c, ec, è chiaro che la x, fatta la moltiplicazione, non potrà infine ascendere tutt' al più, che al grado $bn+km$. Dunque ec.

Potrebbe però darsi benissimo, che l' Equazione di Eliminazione risultasse di un grado minore di $bn+km$. Ciò dipenderà dalla diversa combinazione dei coefficienti A, B, C, ec., e degli altri a, b, c, ec. fra di loro.

131. Date le tre Equazioni $P=0$, $Q=0$, $R=0$ con le tre incognite x, y, z, eliminando da esse le due y, z, qual sarà l' Equazione con la sola x, che ne risulta?

Supponghiamo risolta l' Equazione $R = 0$, considerando come incognita la sola z, e siano z', z'', z''', ec. le sue radici. Ponghiamo ciascuna di queste in luogo della z nelle $P = 0$, $Q = 0$, e chiaminsi $P1 = 0$, $Q1 = 0$, $P2 = 0$, $Q2 = 0$, $P3 = 0$, $Q3 = 0$, ec. i risultati corrispondenti. Supponghiamo, che vengano risolte tutte le $Q1 = 0$, $Q2 = 0$, $Q3 = 0$, ec. nella supposizione di y sola incognita, e siano

$$(I)\quad \begin{array}{l} y'1,\ y''1,\ y'''1,\ y^{\text{v}}1,\ \text{ec.},\\ y'2,\ y''2,\ y'''2,\ y^{\text{v}}2,\ \text{ec.},\\ y'3,\ y''3,\ y'''3,\ y^{\text{v}}3,\ \text{ec.} \end{array}$$

le rispettive radici. Tra queste radici sostituiscansi quelle della prima riga nella $P1 = 0$, quelle della seconda nella $P2 = 0$, quelle della terza nella $P3 = 0$, e così di seguito; i risultati, che ne vengono, chiaminsi

$$(II)\quad \begin{array}{l} P'1 = 0,\ P''1 = 0,\ P'''1 = 0,\ P^{\text{v}}1 = 0,\ \text{ec.},\\ P'2 = 0,\ P''2 = 0,\ P'''2 = 0,\ P^{\text{v}}2 = 0,\ \text{ec.},\\ P'3 = 0,\ P''3 = 0,\ P'''3 = 0,\ P^{\text{v}}3 = 0,\ \text{ec.},\\ \qquad\qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}, \end{array}$$

e questi, come si disse al (N° 125), troveremo altro non essere, che tante Equazioni con la sola x, le radici delle quali sostituite rispettivamente nelle $P1 = 0$, $Q1 = 0$, $P2 = 0$, $Q2 = 0$, $P3 = 0$, $Q3 = 0$, ec. ci daranno in corrispondenza, tanto dalle Equazioni espresse con le P, quanto dalle espresse con le Q i medesimi valori (I) della y. Ponghiamo questi valori della y, e i corrispondenti della x nelle $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$;

$R = o$; da tutte e tre queste Equazioni, replicato il discorso istesso del (cit. N.° 125), vedesi, che si ricaveranno gli stessi valori z', z'', z''', ec. della z. Se a cagion d' esempio, chiamata α una delle radici della $P'1 = o$, collochiamo questa in luogo di x sì in $P1 = o$, che in $Q1 = o$, tanto l' una che l' altra di queste Equazioni avranno la radice comune $y'1$; e conosciuto il valore di questa, se porremo essa, ed α in vece di x nelle tre $P = o$, $Q = o$, $R = o$, ciascuna di queste Equazioni conterrà la stessa radice z'. In conseguenza adunque di tutto ciò le Equazioni (*II*) conterranno separatamente le radici tutte dell' Equazione di Eliminazione (N.° 125), e quindi, per quanto si è detto nel (citato N.° 125), il primo membro di tale Equazione sarà uguale al prodotto $P'1\, P'2\, P'3 \ldots P''1\, P''2\, P''3 \ldots P'''1\, P'''2\, P'''3 \ldots P^{\prime v}1\, P^{\prime v}2\, P^{\prime v}3 \ldots$ ec.

132. Se invece di risolvere le $Q1 = o$, $Q2 = o$, $Q3 = o$, ec., onde avere i valori (*I*) della y, risolte si fossero le $P1 = o$, $P2 = o$, $P3 = o$, ec., e i valori, che ne sarebbero risultati della y, si fossero sostituiti nelle Equazioni espresse con le Q, supposte delle denominazioni simili alle (*II*), sarebbesi ritrovato, come nel (N.° 131), che il primo Membro dell' Equazione di Eliminazione è anche uguale al prodotto $Q'1\, Q'2\, Q'3 \ldots\ldots Q''1\, Q''2\, Q''3 \ldots Q'''1\, Q'''2\, Q'''3 \ldots$ ec.

Egualmente, se nella considerazione dell' incognita z, invece di risolvere la $R = o$ risolta si fos-

fosse l' una, o l' altra delle $P=0$, $Q=0$, e si fosse in seguito proseguito il discorso medesimo del (N.° prec.), ritenendo all' ultimo l' Equazione $R=0$, avremmo ritrovato essere il primo membro della nostra Equazione anche uguale al prodotto $R'1\,R'2\,R'3\ldots\,R''1\,R''2\,R'''3\ldots\ldots R'''1\,R'''2\,R'''3\ldots$ ec.

133. Eliminare dalle date $P=0$, $Q=0$, $R=0$ le due incognite y, z.

Col metodo del (N.° 127) elimino dalle $P=0$, $R=0$ la z, e mi verrà l' Equazione $P1\,P2\,P3\ldots=0$ (N.i 127, 131); faccio l' Eliminazione istessa dalle $Q=0$, $R=0$, e pei (citati N.i 127, 131) otterrem l' Equazione $Q1\,Q2\,Q3\ldots=0$. Ora supposto $P1\,P2\,P3\ldots=T$, $Q1\,Q2\,Q3\ldots=V$, mediante lo stesso (N.° 127) elimino la y dalle due $T=0$, $V=0$, e il risultato $T'\,T''\,T'''\,T^{v}\ldots=0$, che ne otterremo, sarà esattamente la Equazione di Eliminazione domandata. Imperciocchè, avendosi per la ipotesi

$T'=P'1\,P'2\,P'3\ldots$, $T''=P''1\,P''2\,P''3\ldots$, $T'''=P'''1\,P'''2\,P'''3\ldots$, $T^{v}=P^{v}1\,P^{v}2\,P^{v}3\ldots$ ec., sarà

$T'\,T''\,T'''\,T^{v}\ldots=P'1\,P'2\,P'3\ldots P''1\,P''2\,P''3\ldots P'''1\,P'''2\,P'''3\ldots P^{v}1\,P^{v}2\,P^{v}3\ldots$ ec. ec;

ma pel (N.° 131) quest' ultimo prodotto ci esprime esattamente il primo membro della chiesta Equazione di Eliminazione. Dunque ec.

Se invece di eliminare la z dalle due $P=0$, $R=0$,

$R=o$, e dalle $Q=o$, $R=o$, fatta avessimo l' Eliminazione istessa dalle $P=o$, $Q=o$, e dalle $Q=o$, $R=o$, oppure dalle $P=o$, $Q=o$, e dalle $P=o$, $R=o$, pel (N.° prec.) si vede, che saremmo giunti sempre alla medesima Equazione finale avente la sola x.

134. Se vengano proposte quattro, cinque, ec. Equazioni con un numero corrispondente d' incognite, potremo su di esse applicare le stesse riflessioni dei (N.i prec.), e determinare così qual debba essere l' ultima Equazione, in cui più non contengasi, che un' incognita sola.

135. Trasformare l' Equazione $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} +$ ec. $= o$ in un' altra, di cui sia radice la $f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(m)})$ funzione irrazionale.

Prima d' intraprendere la soluzione di questo Problema generale, prendiamo per maggior chiarezza a considerare il seguente caso particolare.

Sia $x^2 + A x + B = o$ l' Equazione data, ed $a x' + b \sqrt{x''}$ la data funzione irrazionale. Facciamo in questa funzione tutte le permutazioni possibili fra le x', x''; avremo i due risultati $a x' + b \sqrt{x''}$, $a x'' + b \sqrt{x'}$, e questi, se la funzione fosse razionale, sarebbero tutte le radici della Trasformata (N.° 93); ma essendo la funzione irrazionale, entrano in essa a considerarsi anche i diversi valori dei radicali. Affine dunque di avere tutte le radici, e però il grado della Trasformata, converrà tener conto sì delle permutazioni, come

come ancora dei valori tutti dei radicali. Ciò posto, chiamo y l' incognita della Trasformata, suppongo $y = ax' + b\sqrt{x''}$, tolgo da questa Equazione per mezzo del (N.° 121) il radicale $\sqrt{x''}$, ed avremo, ciò fatto $y^2 - 2ax'y + a^2x'^2 - b^2x'' = 0$. Nella maniera medesima supposto $y = ax'' + b\sqrt{x'}$, otterremo $y^2 - 2ax''y + a^2x''^2 - b^2x' = 0$. Ora la prima di queste due Equazioni razionali in y comprende tutti i valori di quest' incognita, che corrispondendo alla permutazione $ax' + b\sqrt{x''}$ dipendono dai valori diversi di $\sqrt{x''}$ (N.° 123), e la seconda comprende tutti i valori corrispondenti all' altra permutazione $ax'' + b\sqrt{x'}$, e dipendenti dai valori di $\sqrt{x'}$ (cit. N.° 123). Dunque in amendue queste Equazioni tutte comprendendosi le radici della Trasformata, avrò la Trasformata medesima, facendo, ed uguagliando allo zero il prodotto dei loro primi due membri, facendo cioè $y^4 - 2a(x' + x'')y^3 +$
$\left(a^2(x'^2 + x''^2) + 4a^2x'x'' - b^2(x' + x'')\right)y^2 +$
$\left(2ab^2(x'^2 + x''^2) - 2a^3(x'x''^2 + x'^2x'')\right)y$
$+ a^4x'^2x''^2 - a^2b^2(x'^3 + x''^3) + b^4x'x'' = 0$.
Considerando presentemente i coefficienti di quest' ultima Equazione, veggo che essi altro non sono, che tante funzioni razionali delle x', x'' della forma $f(x', x'')$; potran dunque sempre determinarsi medianti i (N.i 31, 35, 41). Avendosi difatti $\Sigma x = -A$, $\Sigma x^2 = A^2 - 2B$, $\Sigma x^3 = 3AB - A^3$, $x'x'' = B$, $\Sigma x'x^2 = \Sigma x'\Sigma x^2 - \Sigma x^3 = -AB$, sostituisco, e determinati così i coefficienti,

cienti, avrem l' Equazione
$y^4 + 2aAy^3 + (a^2(A^2 - 2B) + 4a^2B + b^2A)y^2 + (2ab^2(A^2 - 2B) + 2a^3AB)y + a^4B^2 - a^2b^2(3AB - A^3) + b^4B = 0$, la quale non sarà che la Trasformata richiesta.

Poichè la seconda delle due precedenti Equazioni, cioè la $y^2 - 2ax''y + a^2x''^2 - b^2x' = 0$ altro non è, che la prima $y^2 - 2ax'y + a^2x'^2 - b^2x'' = 0$, cambiata la x' in x'', ne segue, che ottenuta questa, potevamo subito ricavar quella con la semplice permutazione di x' in x'', senza riccorrere alla $y = ax'' + b\sqrt{x'}$.

136. Passiamo presentemente al caso generale propostoci nel (N.° prec.). Sia la supposta funzione irrazionale $f(x')(x'')(x''')\ldots\ldots(x^{(m)}) = y$; tolgo da questa Equazione i radicali, e ne verrà un' Equazione in y della forma $y^p + F'y^{p-1} + G'y^{p-2} + H'y^{p-3} + \text{ec.} = 0$, in cui i coefficienti F', G', H', ec. non sono che tante funzioni razionali delle x', x'', x''', ec. dipendenti dalla $f(x')(x'')(x''')\ldots\ldots(x^{(m)})$. Ora invece di fare, come si è accennato sul principio del precedente caso particolare tutte le permutazioni della $f(x')(x'')(x''')\ldots\ldots(x^{(m)})$, e di trovare le corrispondenti Equazioni razionali (N.° prec.), facciamo per maggiore facilità, come si è soggiunto sul fine del (cit. N.° prec.), simili permutazioni nei coefficienti F', G', H', ec., e chiamati F'', G'', H'', ec.; F''', G''', H''', ec. ec., $F^{(\pi)}$, $G^{(\pi)}$, $H^{(\pi)}$, ec. i rispettivi risultati, che ne vengono, siano, compresavi la prima,

$y^p +$

$$
\begin{array}{ll}
& y^p + F' y^{p-1} + G' y^{p-2} + H' y^{p-3} + \text{ec.} = 0\,, \\
(III) & y^p + F'' y^{p-1} + G'' y^{p-2} + H'' y^{p-3} + \text{ec.} = 0\,, \\
& y^p + F''' y^{p-1} + G''' y^{p-2} + H''' y^{p-3} + \text{ec.} = 0\,, \\
& \qquad\qquad \text{ec.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ec.} \\
& y^p + F^{(\pi)} y^{p-1} + G^{(\pi)} y^{p-2} + H^{(\pi)} y^{p-3} + \text{ec.} = 0
\end{array}
$$

le corrispondenti Equazioni. Se di numero π suppongansi le varie permutazioni della $f(x')(x'')(x''')\ldots\ldots(x^{(m)})$, è chiaro che di numero π saranno ancora tutte le permutazioni diverse di ciascun coefficiente F', G', H', ec., e però essendo in numero π le trovate Equazioni razionali, fino a π giungeranno gli apici sovraposti ai loro coefficienti.

Moltiplico fra di loro i primi Membri di tutte queste Equazioni (III), e faccio il prodotto, che ne risulta

$$(IV) \quad y^{p\pi} + M y^{p\pi-1} + N y^{p\pi-2} + P y^{p\pi-3} + \text{ec.} = 0.$$

Poichè l' eseguire nella Equazioni (III), ossia nei loro coefficienti le diverse permutazioni fra le x', x'', x''', ec. non altro effetto produce, che di cambiare l' una Equazione nell' altra, ne segue evidentemente, che il prodotto di tutti i primi Membri di queste Equazioni, cioè il primo Membro della (IV), ossia i suoi coefficienti M, N, P, ec. saranno tante funzioni delle x', x'', x''', ec. tali, che restano sempre le medesime, qualunque permutazione eseguiscasi tra queste x', x'', x''', ec., e saranno perciò tante funzioni razionali della forma $f(x', x'', x''', \ldots x^{(m)})$. Ma tali funzioni sono sempre determinabili col mezzo dei coefficienti A, B, C, ec. della data. Eseguisco pertanto, to simili determinazioni, e conosciuti così i coefficienti M, N, P, ec., avremo determinata l' Equazione (*IV*), la quale per conseguenza non sarà che la Trasformata richiesta. Abbiamo già nel (N.° prec.) un esempio di questa operazione.

127. Data la funzione $y = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)})$, per conoscere il grado della Trasformata, è chiaro, che basta determinare il numero dei valori della y, che dipendono dalla moltiplicità dei valori dei radicali in essa contenuti, determinare il numero delle permutazioni fra le x', x'', x''', ec. nella stessa $f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)})$, e chiamato il primo di questi numeri p, il secondo π, il loro prodotto $p\,\pi$ rappresenterà il grado della Trasformata. Se la funzione data fosse stata razionale, il solo numero π avrebbe rappresentato questo grado (N.° 92); quindi si vede, di quanto ascender deve la Trasformata, allorchè la funzione proposta è irrazionale.

CAPO OTTAVO.

Della Determinazione delle Funzioni fra le radici di una data Equazione Algebraica, dipendentemente da altre Funzioni proposte fra le radici medesime.

138. Supponghiamo, che una data funzione riducasi all' espressione $\frac{0}{0}$, come per esempio la quantità $\frac{ax^2 - ax^2}{bx - c - bx + c}$, la quale, qualunque siasi la x, è sempre $= \frac{0}{0}$, oppure l' altra $\frac{x^2 - (a+b)x + ab}{x^2 - b^2}$, di cui se si voglia il valore nella supposizione di $x = b$, ci risulta $\frac{b^2 - (a+b)b + ab}{b^2 - b^2} = \frac{0}{0}$. Ora quale sarà il valore di una simile espressione $\frac{0}{0}$?

Sia $\frac{0}{0} = z$; sarà z il vero valore di questa espressione, mentre moltiplicando la z, la quale non è, che un quoto, pel divisore 0, restituiscasi il dividendo, che è parimenti 0; ma qualunque sia la z, è sempre $0 \times z = 0$; dunque potrà in generale la z avere un valore qualunque, e sarà sempre $= \frac{0}{0}$. Pertanto l' espressione $\frac{0}{0}$ sarà per se

una

una quantità indeterminata, come è indeterminata la z; e ciò è vero in generale, come nel primo degli esempj accennati; ma nei diversi casi particolari avrà la z, e però l' espressione $\frac{0}{0}$ valori particolari; così nell' esempio secondo, mentre $x = b$, la supposta frazione, e quindi la $z = \frac{0}{0}$ acquistar deve valore particolare, e acquista difatti, come vedremo fra poco, il valore $\frac{b-a}{2b}$.

139. Abbiasi la frazione

$\frac{A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \text{ec.}}{a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \text{ec.}} = z$, e supponghiamo, che posta la quantità α in luogo di x, la z divenga z', e sia $A\alpha^m + B\alpha^{m-1} + C\alpha^{m-2} + \text{ec.} = 0$, $a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + \text{ec.} = 0$, cosicchè $z' = \frac{0}{0}$. In questa supposizione io dico, che sarà

$$z' = \frac{m A \alpha^{m-1} + (m-1) B \alpha^{m-2} + (m-2) C \alpha^{m-3} + \text{ec.}}{n a \alpha^{n-1} + (n-1) b \alpha^{n-2} + (n-2) c \alpha^{n-3} + \text{ec.}}$$

Essendo α radice delle due Equazioni $A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \text{ec.} = 0$, $a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \text{ec.} = 0$, e però divisa la prima per A, la seconda per a, e supposto per semplicità $\frac{B}{A} = F$, $\frac{C}{A} = G$, ec.; $\frac{b}{a} = f$, $\frac{c}{a} = g$, ec., delle due $x^m + F x^{m-1} + G x^{m-2} + \text{ec.} = 0$, $x^n + f x^{n-1} + g x^{n-2} + \text{ec.} = 0$ avremo pel (N.° 33)

$x^m + F x^{m-1} + G x^{m-2} + \text{ec.} = (x - \alpha)$
$(x^{m-1} + (\alpha + F) x^{m-2} + (\alpha^2 + F\alpha + G) x^{m-3} + \text{ec.})$,
$x^n + f x^{n-1} + g x^{n-2} + \text{ec.} = (x - \alpha)$
$(x^{n-1} + (\alpha + f) x^{n-2} + (\alpha^2 + f\alpha + g) x^{n-3} + \text{ec.})$.
Ora moltiplico la prima di queste Equazioni per A, la seconda per a, e in seguito divido quella per questa; ciò facendo, giacchè per la ipotesi abbiamo
$A(x^m + F x^{m-1} + G x^{m-2} + \text{ec.}) =$
$A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \text{ec.}$,
$a(x^n + f x^{n-1} + g x^{n-2} + \text{ec.}) =$
$a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \text{ec.}$,
ne viene, che otterremo

$$z = \frac{A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \text{ec.}}{a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \text{ec.}} =$$
$$\frac{A(x^{m-1} + (\alpha + F) x^{m-2} + (\alpha^2 + F\alpha + G) x^{m-3} + \text{ec.})}{a(x^{n-1} + (\alpha + f) x^{n-2} + (\alpha^2 + f\alpha + g) x^{n-3} + \text{ec.})};$$

e quindi si ricaverà lo stesso risultato, ponendo α in luogo di x tanto nella prima, che nella seconda di queste due espressioni della z. Ma pel (N.° 60) abbiamo
$\alpha^{m-1} + (\alpha + F) \alpha^{m-2} + (\alpha^2 + F\alpha + G) \alpha^{m-3} + \text{ec.}$
$= m\alpha^{m-1} + (m-1) F \alpha^{m-2} + (m-2) G \alpha^{m-3} + \text{ec.}$,
$\alpha^{n-1} + (\alpha + f) \alpha^{n-2} + (\alpha^2 + f\alpha + g) \alpha^{n-3} + \text{ec.}$
$= n\alpha^{n-1} + (n-1) f \alpha^{n-2} + (n-2) g \alpha^{n-3} + \text{ec.}$.
Dunque sostituendo si otterrà

$$z' = \frac{A(m\alpha^{m-1} + (m-1) F\alpha^{m-2} + (m-2) G\alpha^{m-3} + \text{ec.})}{a(n\alpha^{n-1} + (n-1) f\alpha^{n-2} + (n-2) g\alpha^{n-3} + \text{ec.})};$$

e finalmente moltiplicando rispettivamente per A, a, e ponendo in luogo di F, G, ec.; f, g, ec. i valori corrispondenti, avremo

$z' =$

$$z' = \frac{mA\alpha^{m-1} + (m-1)B\alpha^{m-2} + (m-2)C\alpha^{m-3} + \text{ec.}}{na\alpha^{n-1} + (n-1)b\alpha^{n-2} + (n-2)c\alpha^{n-3} + \text{ec.}}$$

C. d. d.

140. Mediante il precedente Teorema potremo facilmente determinare il valore della supposta frazione z (N.° prec.), mentre per la sostituzione di α diviene $= \frac{0}{0}$; a questo fine si moltiplichi ciascun termine sì del Numeratore, che del Denominatore della frazione data pel proprio esponente; si diminuisca ciascun esponente di un' unità; avuto il risultato $\frac{mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} + \text{ec.}}{nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + (n-2)cx^{n-3} + \text{ec.}}$, sostituiscasi in esso α in luogo di x, e ci risulterà così pel (N.° prec.) il domandato valore di $z' = \frac{0}{0}$.

Per tal modo, affine di avere il valore della frazione $\frac{x^2 - (a+b)x + ab}{x^2 - b^2}$ supposta al (N.° 138) nel caso di $x = b$, eseguisco su di essa l' operazione ora accennata, e risultandoci la quantità $\frac{2x - (a+b)}{2x}$, pongo in questa b in luogo di x, e otterremo così $\frac{2b - (a+b)}{2b} = \frac{b-a}{2b}$ pel richiesto valore.

141. Vogliasi in secondo luogo il valore della fra-

la frazione $\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^4 - 17x^2 + 36x - 20}$ nella supposizione di $x = 2$. Faccio la sostituzione del 2, e poichè ci risulta $z' = \frac{8 - 12 + 4}{16 - 68 + 72 - 20} = \frac{0}{0}$, eseguisco la precedente operazione, e sostituisco il 2 nel risultato $\frac{3x^2 - 6x}{4x^3 - 34x + 36}$; ma quì pure ci viene $z' = \frac{12 - 12}{32 - 68 + 36} = \frac{0}{0}$; come adunque faremo in questo caso, onde avere il valore di z'?

Supponghiamo, che il risultato
$\frac{mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} + \text{ec.}}{nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + (n-2)cx^{n-3} + \text{ec.}}$ sia tale, che ponendo $x = \alpha$ divenga esso pure $\frac{0}{0}$, come appunto è successo nel nostro esempio. Fatto in questa ipotesi lo stesso discorso, e le stesse operazioni del (N.° 139), vedremo in egual maniera, che ci risulta

$$z' = (m(m-1)A\alpha^{m-2} + (m-1)(m-2)$$
$$B\alpha^{m-3} + (m-2)(m-3)C\alpha^{m-4} + \text{ec.}):$$
$$(n(n-1)a\alpha^{n-2} + (n-1)(n-2)$$
$$b\alpha^{n-3} + (n-2)(n-3)c\alpha^{n-4} + \text{ec.}).$$

Dunque per ottenere il chiesto valore, non avremo, che a proseguire sulla $\frac{mAx^{m-1} + \text{ec.}}{nax^{m-1} + \text{ec.}}$ l'operazione istessa del (N.° prec.). Ciò eseguendo pertanto nel nostro esempio sulla frazione

$\frac{3x^2-6x}{4x^3-34x+36}$, otterremo da prima l' altra $\frac{6x-6}{12x^2-34}$, e collocato finalmente il 2, invece della x, otterremo $z' = \frac{12-6}{48-34} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.

Che se dalla sostituzione dell' α nel caso generale, e del 2 nel nostro esempio risulti ancora una terza volta questa espressione $\frac{0}{0}$, non avremo che a proseguire l' operazione istessa (N.° prec.), e così in progresso, finchè ne venga un valor determinato, e questo sarà il valore di z'.

142. Proposta una funzione qualunque $t = f(x')(x'')(x''')\ldots\ldots$ delle radici della data $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{ec.} = 0$, determinare dipendentemente da questa il valore corrispondente di un' altra funzione qualunque $y = \varphi(x')(x'')(x''')\ldots\ldots$ delle radici medesime.

O le due supposte funzioni t, y, data la prima, incognita l' altra, sono due funzioni simili, e razionali (N.° 4, 5), o sono dissimili, e irrazionali. Prendiamo da principio a considerare il primo di questi casi; ma prima di accingerci alla soluzione generale di questo Problema, affine di render la cosa più chiara, e più facile, applichiamo la soluzione istessa al seguente caso particolare.

143. Data l' Equazione $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, le cui radici sono x', x'', x''', e data la funzione

$t' =$

$t' = x' + x''$, vogliasi determinare dipendentemente da questa la funzione $y' = x'x''$ simile, come si vede alla prima t'. Essendo tanti i valori della t, quanti i corrispondenti della y (N.° 4), chiamiamo $t' = x' + x''$, $t'' = x' + x'''$, $t''' = x'' + x'''$ i primi, e $y' = x'x''$, $y'' = x'x'''$, $y''' = x''x'''$ i secondi, per modo, che y' corrisponda a t', y'' a t'', y''' a t''', e sia $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$ l' Equazione, da cui dipende la t; converrebbe ora pel (N.° 105) determinare i coefficienti p, q, r; ma già dal (N.° 106) sappiamo essere $p = 2A$, $q = A^2 + B$, $r = AB - C$, e $t^3 + 2At^2 + (A^2 + B)t + (AB - C) = 0$ l' Equazione in t. Ciò fatto, affine di determinare, come chiedesi dal Problema, i tre valori della y dipendentemente dai corrispondenti della t, supponghiamo le funzioni $y' + y'' + y'''$, $t'y' + t''y'' + t'''y'''$, $t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y'''$, e chiamiamo H 1, H 2, H 3 i loro valori, cosicchè abbiasi

$$(I) \quad \begin{aligned} y' + y'' + y''' &= H\,1 \\ t'y' + t''y'' + t'''y''' &= H\,2 \\ t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y''' &= H\,3. \end{aligned}$$

Essendo queste evidentemente tante funzioni delle x', x'', x''' della forma $f(x', x'', x''')$, saranno pel (N.° 101) le quantità H 1, H 2, H 3 determinabili pei coefficienti della data, senza la soluzione di alcuna Equazione di grado maggiore del primo, ed in realtà avendosi pei (N.[i] 31, 41)

$y' + y'' + y''' = x'x'' + x'x''' + x''x''' = B$,

$t'y' + t''y'' + t'''y''' = (x' + x'')x'x'' + (x' + x''')x'x''' + (x'' + x''')x''x''' = \Sigma x^1 x^2 = 3C - AD$,

t'^2y'

$t'^2 y' + t''^2 y'' + t'''^2 y''' = (x' + x'')^2 x' x'' + (x' + x''')^2$
$x' x''' + (x'' + x''')^2 x'' x''' = \Sigma x^1 x^3 + 2 \Sigma \overline{x\, x}^2 =$
$A^2 B - 5 A C$, ne verrà
$H 1 = B$, $H 2 = 3 C - A B$, $H 3 = A^2 B - 5 A C$.
Determinate così queste quantità potremo mediante la Eliminazione ricavare dalle Equazioni (I) il valore delle y', y'', y''' espresso per mezzo delle t', t'', t'''.

Facendo la Eliminazione con i metodi ordinarj, nella espressione di ciascuna delle y', y'', y''' entrerebbero tutti e tre i valori della t; onde se si volesse, che nel valore di y' entrasse soltanto t', in quello di y'' si contenesse solamente t'', e in y''' solo t''', come in realtà domanda il Problema, converrebbe ricorrere ad altro metodo affatto diverso dai comuni, e tale sarà il seguente. Moltiplicata la prima delle (I) Equazioni per un' indeterminata K 1, e la seconda per un' altra K 2, si sommino esse insieme con la terza, cosicchè ne risulti l' Equazione

$$(II)\ (K 1 + K 2\, t' + t'^2) y' + (K 1 + K 2\, t'' + t''^2) y'' + (K 1 + K 2\, t''' + t'''^2) y''' = H 1\, K 1 + H 2\, K 2 + H 3,$$

e da questa apparisce, che potremo ottenere il valore per esempio di y', se K 1, K 2 vengano determinate in maniera, che i coefficienti delle y'', y''' uguaglino lo zero, poichè in tal caso ne viene

$$(III)\ y = \frac{H 1\, K 1 + H 2\, K 2 + H 3}{K 1 + K 2\, t' + t'^2}.$$

Supponghiamo ora $K 1 + K 2\, t + t^2 = T$, ed esprimiamo per T', T'', T''' i valori particolari di T corrispondenti alle supposizioni di $t = t', t'', t'''$, onde, sostituendo, l' Equazione precedente divenga $T'y' + T''y'' + T'''y''' = H1\,K1 + H2\,K2 + H3$. Supponghiamo inoltre, che T diventi zero, se facciasi $t = t''$, oppure $t = t'''$, per modo, che t'', t''' siano radici della $t^2 + K2\,t + K1 = T = 0$. Questa supposizione è chiaro che dalla (*II*) ci produrrà l' Equazione (*III*), e però servirà per la determinazione della y'. Moltiplichiamo ora l' Equazione $T = 0$ per $t - t'$, ne verrà l' altra $T(t - t') = t^3 + (K2 - t')t^2 + (K1 - K2\,t')t - K1\,t' = 0$ avente per radici tutte e tre le quantità t', t'', t'''; essendo questa adunque identica con l' altra $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, col paragone dei termini omologhi ci darà le Equazioni $K2 - t' = p$, $K1 - K2\,t' = q$, $-K1\,t' = r$; e da queste otterremo $K2 = p + t'$, $K1 = q + pt' + t'^2$. L' ultima delle tre precedenti Equazioni dandoci

$K1 = \frac{-r}{t'}$, ed essendo t' radice della

$t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, onde si à $t'^3 + pt'^2 + qt' + r = 0$, e però $t'^2 + pt' + q = -\frac{r}{t'}$, si vede

che tale ultima Equazione sarà identica con l' antepenultima. Moltiplico presentemente la K 1 per H 1, la K 2 per H 2, e avendosi

$H1\,K1 = H1\,q + H1\,pt' + H1\,t'^2$,

$H2\,K2 = H2\,p + H2\,t'$,

$H3 = H3$,

il numeratore del secondo membro della (*III*) diverrà

verrà $(H1q+H2p+H3)+(H1p+H2)t'+H1t'^2$, ossia $Nt'^2+Pt'+Q$, chiamati per semplicità N, P, Q i rispettivi coefficienti.

Abbiamo così espresso il Numeratore del secondo membro della (*III*) col mezzo della t', e di quantità cognite. Venendo ora alla determinazione del denominatore T, osservo che abbiamo $T(t-t')=t^3+pt^2+qt+r$, e però

$T=\frac{t^3+pt^2+qt+r}{t+t'}$, onde ponendo t' in luogo di t, si ottiene

$T'=\frac{t'^3+pt'^2+qt'+r}{t'-t'}=\frac{0}{0}$. Dunque pel (N.° 140) sarà

$T'=\frac{3t'^2+2pt'+q}{1}=3t'^2+2pt'+q$, e quindi sostituendo nella (*III*), avremo

$$y'=\frac{Nt'^2+Pt'+Q}{3t'^2+2pt'+q}.$$

Ora il discorso, che abbiamo fatto sopra t', ed y', poteasi fare egualmente sopra t'', ed y'', sopra t''', ed y'''. Dunque sarà ancora

$y''=\frac{Nt''^2+Pt''+Q}{3t''^2+2pt''+q}$, ed $y'''=\frac{Nt'''^2+Pt'''+Q}{3t'''^2+2pt'''+q}$, e togliendo gli apici, sarà in generale

$$y=\frac{Nt^2+Pt+Q}{3t^2+2pt+q}.$$

Sia per esempio $x^3-3x^2-10x+24=0$ l' Equazione data, in cui si à $x'=4$, $x''=2$, $x'''=-3$. Essendo $A=-3$, $B=-10$, $C=24$, otter-

 remo

remo $p = 2A = -6$, $q = A^2 + B = -1$, $r = AB - C = 6$, e quindi $t^3 - 6t^2 - t + 6 = 0$, Equazione, nella quale $t' = 6$, $t'' = 1$, $t''' = -1$. Ricaveremo inoltre $H1 = B = -10$, $H2 = 3C - AB = 42$, $H3 = A^2B - 5AC = 270$, e però $N = H1 = -10$, $P = H1p + H2 = 102$, $Q = H1q + H2p + H3 = 28$.
Dunque sostituendo sarà

$$y = \frac{-10t^2 + 102t + 28}{3t^2 - 12t - 1},$$ e supponendo successivamente $t = 6, 1, -1$, otterremo

$$y' = \frac{-360 + 612 + 28}{108 - 72 - 1} = 8,$$

$$y'' = \frac{-10 + 102 + 28}{3 - 12 - 1} = -12,$$

$$y''' = \frac{-10 - 102 + 28}{3 + 12 - 1} = -6;$$ come appunto si vede dover essere, giacchè abbiamo $x'x'' = 8$, $x'x''' = -12$, $x''x''' = -6$.

144. Passiamo presentemente alla soluzione generale del nostro Problema (N.° 142) nella supposizione per ora, che t, ed y siano funzioni simili, e razionali. Essendo

$$(IV)\ t^n + pt^{n-1} + qt^{n-2} + \ldots\ldots + ut^2 + vt + z = 0$$

l' Equazione in t determinata, come nel (N.° 105), dalla funzione data $f(x')(x'')(x''')\ldots\ldots(x^{(m)})$ (N.° 142), ed essendo t', t'', t''', ec., $t^{(n)}$ le sue radici, siano y', y'', y''', ec., $y^{(n)}$ i diversi valori della $y = \varphi(x')(x'')(x''')\ldots\ldots(x^{(m)})$, prodotti dalle diverse permutazioni in questa funzione, e pel (N.°

(N.° 93) corrispondenti alle varie permutazioni della t, cosicchè y' corrisponda a t', y'' a t'', y''' a t''', ec.. Se noi presentemente formeremo tra le y', y'', y''', ec., $y^{(n)}$ tante Equazioni tutte di primo grado, come le (I), è chiaro, che pel loro mezzo potremo, servendoci della Eliminazione indicata al (N.° 143), ottenere i valori di y espressi pei corrispondenti di t, e quantità cognite, e giungeremo così alla soluzione del Problema. Supponghiamo perciò le Equazioni

$$(V)\quad \begin{cases} y' + y'' + y''' + y^{\mathrm{IV}} + \ldots\ldots + y^{(n)} = H1, \\ t'y' + t''y'' + t'''y''' + t^{\mathrm{IV}}y^{\mathrm{IV}} + \ldots + t^{(n)}y^{(n)} = H2, \\ t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y''' + t^{\mathrm{IV}2}y^{\mathrm{IV}} + \ldots t^{(n)2}y^{(n)} = H3, \\ t'^3y' + t''^3y'' + t'''^3y''' + t^{\mathrm{IV}3}y^{\mathrm{IV}} + \ldots t^{(n)3}y^{(n)} = H4, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ t'^{\,n-1}y' + t''^{\,n-1}y'' + t'''^{\,n-1}y''' + t^{\mathrm{IV}\,n-1}y^{\mathrm{IV}} + \ldots\ldots \\ \qquad + t^{(n)\,n-1}y^{(n)} = H(n). \end{cases}$$

Conservando i primi membri di queste sempre lo stesso valore, qualunque permutazione si faccia tra le x', x'', x''', ec., giacchè per simili permutazioni i termini per esempio t'^3y', t''^3y'', t'''^3y''', ec. non fanno che cangiarsi fra loro, e per conseguenza la loro somma $t'^3y' + t''^3y'' + t'''^3y''' +$ ec. resta sempre la medesima, e così dicasi degli altri, ne viene, che questi primi membri venendo espressi, come nel (N.° 143), per mezzo delle x', x'', x''', ec., e però i loro valori H1, H2, H3, ec. saranno tutti determinabili pei coefficienti A, B, C, ec. della data, senza sciogliere Equaziozione di grado maggiore del primo (N.° 101).

Supposte pertanto determinate le quantità H 1, H 2, H 3, ec., come precedentemente, proseguendo il calcolo siccome nel (N.° 143), moltiplichiamo la prima delle Equazioni (V) per l' indeterminata K 1, la seconda per K 2, la terza per K 3, fino alla penultima, la quale si moltiplichi per K($n-1$), e si sommino poscia tutte insieme; otterremo così le Equazioni

$$(K1 + K2\,t' + K3\,t'^2 + K4\,t'^3 + \ldots$$
$$+ K(n-1)\,t'^{n-2} + t'^{n-1})\,y' +$$
$$(K1 + K2\,t'' + K3\,t''^2 + K4\,t''^3 + \ldots$$
$$+ K(n-1)\,t''^{n-2} + t''^{n-1})\,y'' +$$
$$(K1 + K2\,t''' + K3\,t'''^2 + K4\,t'''^3 + \ldots$$
$$+ K(n-1)\,t'''^{n-2} + t'''^{n-1})\,y''' +$$
$$(K1 + K2\,t^{\text{V}} + K3\,t^{\text{V}2} + K4\,t^{\text{V}3} + \ldots$$
$$+ K(n-1)\,t^{\text{V}n-2} + t^{\text{V}n-1})\,y^{\text{V}} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$(K1 + K2\,t^{(n)} + K3\,t^{(n)2} + K4\,t^{(n)3} + \ldots$$
$$+ K(n-1(\,t^{(n)n-2} + t^{(n)n-1})\,y^{(n)} =$$
$$= H1\,K1 + H2\,K2 + H3\,K3 + H4\,K4 + \ldots$$
$$+ H(n-1)\,K(n-1) + H(n),$$

ossia supposto, come di sopra (N.° 143)

$K1 + K2\,t + K3\,t^2 + K4\,t^3 + \ldots + K(n-1)\,t^{n-2} + t^{n-1} = T$, avremo l' Equazione

$$(VI)\; T'\,y' + T''\,y'' + T'''\,y''' + T^{\text{V}}\,y^{\text{V}} + \ldots + T^{(n)}\,y^{(n)}$$
$$= H1\,K1 + H2\,K2 + H3\,K3 + \ldots + H(n-1)$$
$$K(n-1) + H(n).$$

Affine ora di determinare la y', converrà, che le K 1, K 2, K 3, ec. siano tali, che rendano $T'' = 0$,

T'''

$T''' = 0$, $T^{IV} = 0$, ec., $T^{(n)} = 0$, ossia che ne venga l' Equazione

(*VII*) $T = K1 + K2\,t + K3\,t^2 + \ldots + K(n-2)\,t^{n-3} + K(n-1)\,t^{n-2} + t^{n-1} = 0$, nella quale la t abbia per radici le t'', t''', ec., $t^{(n)}$. In tale ipotesi dalla precedente (*VI*) avremo

(*VIII*) $y' = (H1\,K1 + H2\,K2 + H3\,K3 + \ldots + H(n-1)\,K(n-1) + H(n)) : T'$.

Moltiplico la $T = 0$ pel binomio $t - t'$, ne verrà l' Equazione $T(t - t') = 0$ avente tutte le radici t', t'', t''', ec., $t^{(n)}$, la quale perciò sarà identica con la $t^n + p\,t^{n-1} + q\,t^{n-2} + r\,t^{n-3} + \ldots + u\,t^2 + v\,t + z = 0$, ed essendo $T(t - t') = t^n + (K(n-1) - t')\,t^{n-1} + (K(n-2) - K(n-1)\,t')\,t^{n-2} + (K(n-3) - K(n-2)\,t')\,t^{n-3} + \ldots + (K2 - K3\,t')\,t^2 + (K1 - K2\,t)\,t - K1\,t'$, come si vede dalla (*VI*), si avrà, paragonando insieme i termini omologhi,

$K(n-1) - t' = p$, $K(n-2) - K(n-1)\,t' = q$, $K(n-3) - K(n-2)\,t' = r$, ec., $K2 - K3\,t' = u$, $K1 - K2\,t' = v$, $-K1\,t' = z$, dalle quali Equazioni tante di numero, quante sono le indeterminate $K1$, $K2$, $K3$, ec. più una, ritroveremo, come nel (N.° 143),

$K(n-1) = p + t'$,
$K(n-2) = q + p\,t' + t'^2$,
$K(n-3) = r + q\,t' + p\,t'^2 + t'^3$,
. . . .

$K3 = u + \ldots\ldots\ldots + r t'^{n-6} + q t'^{n-5} +$
$\quad p t'^{n-4} + t'^{n-3}$

$K2 = v + u t' + \ldots\ldots\ldots + r t'^{n-5} + q t'^{n-4} +$
$\quad p t'^{n-3} + t'^{n-2}$

$K1 = z + v t' + u t'^{2} + \ldots\ldots + r t'^{n-4} + q t'^{n-3} +$
$\quad p t'^{n-2} + t'^{n-1}$

$$K1 = -\frac{z}{t'}.$$

L' ultima di queste Equazioni si dimostra nella stessa guisa del (cit. N. 143) essere identica con la penultima, onde, tenendo conto di questa, essa può trascurarsi.

Moltiplico le quantità K 1, K 2, K 3, ec. per le corrispondenti H 1, H 2, H 3, ec., verranno i risultati

$H1\,K1 = H1\,z + H1\,v t' + H1\,u t'^{2} + \ldots\ldots +$
$\quad H1\,r t'^{n-4} + H1\,q t'^{n-3} + H1\,p t'^{n-2} + H1\,t'^{n-1},$

$H2\,K2 = H2\,v + H2\,u t' + \ldots\ldots +$
$\quad H2\,r t'^{n-5} + H2\,q t'^{n-4} + H2\,p t'^{n-3} + k2\,t'^{n-2},$

$H3\,K3 = H3\,u + \ldots\ldots\ldots + H3\,r t'^{n-6} +$
$\quad H3\,q t'^{n-5} + H3\,p t'^{n-4} + H3\,t'^{n-3},$

. . . .

$H(n-3)\,K(n-3) = H(n-3)\,r + H(n-3)\,q t'$
$\quad + H(n-3)\,p t'^{2} + H(n-3)\,t'^{3},$

$H(n-2)\,K(n-2) = H(n-2)\,q + H(n-2)\,p t'$
$\quad + H(n-2)\,t'^{2},$

$H(n-1)K(n-1) = H(n-1)\,p + H(n-1)\,t',$

$H(n) \quad = \quad H(n).$

Sommo in colonna, e supposto per maggior semplicità

$H1z + H2v + H3u + \ldots\ldots\ldots + H(n-3)r$
$\quad + H(n-2)q + H(n-1)p + H(n) = Z,$
$H1v + H2u + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + H(n-3)q$
$\quad + H(n-2)p + H(n-1) = V,$
$H1u + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + H(n-3)p$
$\quad + H(n-2) = U,$
(IX) . . . .
$H1r + H2q + H3p + H4 = R,$
$H1q + H2p + H3 = Q,$
$H1p + H2 = P,$
$H1 = N,$

vedesi, che abbiamo
$H1K1 + H2K2 + H3K3 + \ldots\ldots + H(n-1)K(n-1) + H(n)$, cioè il numeratore del secondo membro della (*VIII*), siccome nel (N.° 143), $= Nt'^{n-1} + Pt'^{n-2} + Qt'^{n-3} + Rt'^{n-4} + \ldots\ldots + Ut'^2 + Vt' + Z.$

Per determinare il denominatore T′ (*VIII*), opero come nel (cit.° N.° 143); e avendosi perciò $T(t-t') = t^n + pt^{n-1} + qt^{n-2} + rt^{n-3} + \ldots\ldots + ut^2 + vt + z$, e quindi

$$T = \frac{t^n + pt^{n-1} + qt^{n-2} + rt^{n-3} + \ldots\ldots + ut^2 + vt + z}{t - t'},$$

fatta la supposizione di $t = t'$, ne verra $T' = \frac{0}{0}$; sarà dunque pel (N.° 140) esso denominatore $T' = nt'^{n-1} + (n-1)pt'^{n-2} + (n-2)qt'^{n-3} + (n-3)rt'^{n-4} + \ldots\ldots + 2ut' + v.$

Sostituisco questi valori del Numeratore, e del Denominatore della (*VIII*), e otterremo finalmente

$$y' = (N t'^{n-1} + P t'^{n-2} + Q t'^{n-3} + R t'^{n-4} \ldots + U t'^{2} + V t' + Z) : (n t'^{n-1} + (n-1) p t'^{n-2} + (n-2) q t'^{n-3} + (n-3) r t'^{n-4} + \ldots + 2 u t' + v).$$

Ma come y' corrisponde a t', così y'' corrisponde a t'', y''' a t''', ec.. Dunque togliendo gli apici sarà in generale

$$(M)\; y = (N t^{n-1} + P t^{n-2} + Q t^{n-3} + R t^{n-4} + \ldots + U t^{2} + V t + Z) : (n t^{n-1} + (n-1) p t^{n-2} + (n-2) q t^{n-3} + (n-3) r t^{n-4} + \ldots + 2 u t + v),$$

Equazione, dalla quale si avranno tutti i valori y', y'', y''', ec., ponendo successivamente t', t'', t''', ec. in luogo della t, come era stato richiesto.

145. Dalla soluzione presente si vede, che se t, ed y sono due funzioni simili, e razionali, si potrà sempre ottenere razionalmente ciascun valore della y pel corrispondente della t, e pei coefficienti A, B, C, ec. della data, determinando da prima nella maniera accennata l' esponente n, e i coefficienti p, q, r, ec. della (*IV*), determinando in secondo luogo le quantità H 1, H 2, H 3, ec. delle (*V*), sostituendo in seguito sì i primi, che le seconde nelle Equazioni (*IX*), onde avere i valori delle quantità N, P, Q, ec., e riponendo finalmente nella (M) e i valori delle N, P, Q, ec., e quei delle n, p, q, r, ec.. Riflettasi nella precedente (M), che come y' dipende da t', così y'' dipende da t'', y''' da t''', e così in progresso.

146. Siano le due funzioni t, y razionali, e dissimili fra di loro, essendo $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m = \pi$ (N.° 92), o il numero dei valori di y è summultiplo di π, e quello dei valori di t è uguale a π; o essendo π il numero dei valori di y, è summultiplo quello dei valori di t; o finalmente amendue questi numeri sono summultipli di π. Nel primo di questi casi ottiensi la soluzione del Problema (N.° 142), operando nel modo istesso del (N.° 144). Sia per esempio $x^2 + Ax + B = 0$ l' Equazione data, e sia $t' = \frac{x'}{x''}$, $y' = x' + x''$. Avendosi nella $t^2 + pt + q = 0$, $p = \frac{2B - A^2}{B}$, $q = 1$, ed essendo $H1 = y' + y'' = -2A$, $H2 = t'y' + t''y'' = -\frac{2AB + A^3}{B}$, ne verrà

$$y = \frac{-2At - \frac{2AB - A^3}{B}}{2t + \frac{2B - A^2}{B}}, \text{ ossia}$$

$y = \frac{-2ABt - 2AB + A^3}{2Bt + 2B - A^2}$, e ponendo successivamente in luogo di t i valori $t' = \frac{x'}{x''} = \frac{-A + b}{-A - b}$, $t'' = \frac{x''}{x'} = \frac{-A - b}{-A + b}$, supposto per semplicità $\sqrt{(A^2 - 4B)} = b$, avremo

 $y' =$

$$y' = \frac{2A^2B - 2ABb + 2A^2B + 2ABb - A^4 - A^3b}{-2AB + 2Bb - 2AB - 2Bb + A^3 + A^2b} =$$

$$\frac{-A(-4AB + A^3 + A^2b)}{-4AB + A^3 + A^2b} = -A.$$

$$y'' = \frac{2A^2B + 2ABb + 2A^2B - 2ABb - A^4 + A^3b}{-2AB - 2Bb - 2AB + 2Bb + A^3 - A^2b} = -A.$$

147. Che se il numero dei valori diversi di t sia summultiplo di π, e quello dei valori di y uguale a π, per conoscere con maggiore chiarezza, come potremo in tal caso sciogliere il nostro Problema (N.° 142), prendiamo a considerare da prima il seguente caso particolare.

Sia t una funzione della forma $f(x', x'')(x''')(x^{\text{IV}})\ldots$ avente per conseguenza un numero $\frac{\pi}{2}$ di valori (N.° 99), e sia

$t' = f(x', x'')(x''')(x^{\text{IV}})\ldots$,

$t'' = f(x', x''')(x'')(x^{\text{IV}})\ldots$,

$t''' = f(x', x^{\text{IV}})(x''')(x'')\ldots$,

$t^{\text{IV}} = f(x'', x''')(x')(x^{\text{IV}})\ldots$,

ec.

Supposto, che la $\varphi(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})\ldots\ldots$ ci esprima la funzione y avente un numero π di valori diversi (N.° 92), abbiasi

$y' = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})\ldots$,

$y'' = \varphi(x'')(x')(x''')(x^{\text{IV}})\ldots$,

$y''' = \varphi(x')(x''')(x'')(x^{\text{IV}})\ldots$,

$y^{\text{IV}} = \varphi(x''')(x')(x'')(x^{\text{IV}})\ldots$,

$y^{\text{V}} = \varphi$

$$y^{v} = \varphi(x')(x^{\text{v}})(x''')(x'')\ldots\ldots,$$
$$y^{v'} = \varphi(x^{\text{v}})(x')(x''')(x'')\ldots\ldots,$$
$$y^{v''} = \varphi(x'')(x''')(x')(x^{\text{v}})\ldots\ldots,$$
$$y^{v'''} = \varphi(x''')(x'')(x')(x^{\text{v}})\ldots\ldots,$$

ec. ec.

Vogliasi ora dipendentemente da ciascun valore della t, per esempio da t', il corrispondente valor della y (N.° 142). Poichè per la permutazione di x' in x'' la t' resta la medesima, e dalla y abbiamo i due valori y', y'', e poichè le simili permutazioni della y a quelle si vogliono corrispondenti della t (cit.° N.° 142), ne viene che alla sola t' corrisponderanno le due y', y'', e tanto y', come y'' dipenderanno in egual modo da questa stessa t'. Dunque nella soluzion del Problema non essendovi ragione, per cui debba restar determinata piuttosto l' una delle y', y'', che l' altra, ne segue, che dipendentemente dalla t' non potranno tali quantità che venire determinate amendue nel medesimo tempo, e dovranno esse per conseguenza essere amendue radici di una stessa Equazione di secondo grado. Sia $y^2 + g'y + h' = 0$ una tale Equazione; avendosi $g' = -(y' + y'')$, $h' = y'y''$, e però essendo sì l' uno, che l' altro di questi coefficienti funzioni della forma $f(y', y'')$, resteranno essi i medesimi pel cangiamento di y' in y''; ma simile cangiamento nasce dal permutare in $y' = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{\text{v}})\ldots$ la x' in x''. Dunque sostituiti in g', h' invece di y', y'' i loro valori, questi coefficienti diventeranno due funzioni razionali delle x', x'', x''', x^{v}, ec. della forma $\phi'(x', x'')(x''')(x^{\text{v}})\ldots$, e simili però amendue alla t' (N.° 4); potremo pertanto col metodo del (N.° 144) mediante t' determinare razionalmente tanto g', come h'.

In egual maniera si dimostra, che le due quantità y''', y^{iv} dipendono da una Equazione $y^2 + g''y + h'' = 0$, ove i coefficienti g'', h'' sono funzioni della forma $\phi'(x', x''')(x'')(x^{\text{v}})\ldots$, e quindi determinabili razionalmente dalla t'', come i coefficienti g', h' lo sono dalla t'; le due y^{v}, $y^{\text{v}'}$ dipendono dalla $y^2 + g'''y + h''' = 0$, avendosi g''', h''' funzioni della forma $\phi'(x', x^{\text{v}})(x''')(x'')\ldots$, e determinabili perciò nella maniera medesima dalla t'''; e così di seguito. Dunque espresse in generale col mezzo della (M) le quantità g, h mediante la t, se in luogo di quest' incognita sostituirò poscia le radici t', t'', t''', t^{v}, ec., si otterranno in tal guisa successivamente i valori g', h'; g'', h''; g''', h'''; g^{v}, h^{v}, ec., e questi riposti nelle $y^2 + g'y + h' = 0$, $y^2 + g''y + h'' = 0$, $y^2 + g'''y + h''' = 0$, $y^2 + g^{\text{v}}y + h^{\text{v}} = 0$, ec. ci daranno con la soluzione di queste Equazioni i valori delle y', y'', y''', y^{iv}, ec., che richiedevansi dal Problema. E' chiaro, che le ottenute Equazioni in y di secondo grado sono di numero $\frac{\pi}{2}$.

148. Sia per esempio $x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$ l' Equazione data, e sia $t = x' + x''$ la data funzio-

zio-

zione, e vogliasi $y = x' - x''$. Avendosi $m = 3$, $A = 1$, $B = 3$, $C = -2$, e l' Equazione in t essendo $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, avremo pel (N.° 105) $p = 2$, $q = 4$, $r = 5$. Ora t à un numero $\frac{\pi}{2} = 3$ di valori, ed y un numero $\pi = 6$; dunque a ciascun valore di t due corrispondendone di y, ne viene che questi dipenderanno da tante Equazioni, quanti sono i valori della t, cioè da tre Equazioni della forma $y^2 + gy + h = 0$. Sia $y^2 + g'y + h' = 0$ l' Equazione, da cui dipendono i due valori $y' = x' - x''$, $y'' = x'' - x'$ corrispondenti alla sola $t' = x' + x''$. Poichè abbiamo $g' = -(y' + y'') = -(x' - x'' + x'' - x') = 0$, $h' = y'y'' = -(x' - x'')^2$, la nostra Equazione si ridurrà alla $y^2 + h' = 0$, e quindi non sarà necessario che determinare la h'. Avendosi pel dimostrato nel (N.° prec.) la h funzione simile alla t, suppongo pel (N.° 144) le Equazioni

$$h' + h'' + h''' = H1,$$
$$h't' + h''t'' + h'''t''' = H2,$$
$$h't'^2 + h''t''^2 + h'''t'''^2 = H3.$$

Ricavandosi da queste $H1 = 16$, $H2 = -37$, $H3 = 28$, avremo $N = 16$, $P = -5$, $Q = 18$ (N.° 144), e però sostituendo nella (M) avremo $h = \frac{16t^2 - 5t + 18}{3t^2 + 4t + 4}$.

Pongo ora quivi successivamente le tre radici t', t'', t''' in luogo della t, e conosciuti così i tre valori h', h'', h''', ne verranno le tre Equazioni

$y^2 +$

$y^2 + b' = 0$, $y^2 + b'' = 0$, $y^2 + b''' = 0$, dalla soluzione delle quali otterremo tutti e sei i valori y', y'', y''', y^{v}, ec.

149. Se invece di esssere $t = f(x', x'')(x''')(x^{\text{v}}) \ldots\ldots$ (N.° 147), i valori di t fossero stati uguali fra loro a due a due per un' altra permutazione qualunque, fatto lo stesso discorso, avremmo ottenuto in egual maniera un numero $\frac{\pi}{2}$ di Equazioni in y di secondo grado aventi i coefficienti espressi razionalmente pei coefficienti della data, e pei corrispondenti valori della t.

150. Che se nelle permutazioni i valori della t riuscissero uguali fra loro a tre a tre (N.° 98), facendo lo stesso raziocinio, e operando come precedentemente, si troverebbe, che i π valori della y dipendono da $\frac{\pi}{3}$ Equazioni della forma $y^3 + gy^2 + hy + i = 0$, ove i coefficienti g, h, i sono determinabili razionalmente col mezzo dei valori corrispondenti della t, e dei coefficienti A, B, C, ec.

Se la funzione t avesse i proprj valori uguali fra loro a quattro a quattro, i varj valori della y dipenderebbero allora da $\frac{\pi}{4}$ Equazioni ciascuna di quarto grado, i cui coefficienti sarebbero tante funzioni razionali dei rispettivi valori della t, e dei coefficienti della data.

In generale se λ esprime l' esponente di uguaglianza tra i valori della t, cioè se i valori della

t so-

t sono fra loro uguali a λ a λ, si ritroverà in allora i valori di y dipendere da un numero $\frac{\pi}{\lambda}$ di Equazioni del grado λ, e della stessa natura delle precedenti.

151. Supponghiamo nuovamente, che le funzioni t, y siano simili, ma supponghiamo inoltre, che in conseguenza dei valori particolari delle x', x'', x''', ec. due solamente dei valori della t, per esempio i due t'', t''' riescano nel primo modo accennato al (N.° 95) uguali fra loro; per la determinazione in tal caso delle due quantità y'', y''' dipendenti da un valore medesimo $t''=t'''$ facendosi lo stesso discorso del (N.° 147), converrà per queste sole due quantità formar l' Equazione di secondo grado $y^2+gy+h=0$, e in seguito determinare mediante t' i coefficienti g, h, come nel (cit. N.° 147).

152. Data sia per esempio l' Equazione $x^3-5x^2-4x+20=0$, e sia $t=\frac{x'x''}{x'''}$, $y=(x'-x'')^2$, onde abbiasi $t'=\frac{x'x''}{x'''}$, $t''=\frac{x'x'''}{x''}$, $t'''=\frac{x''x'''}{x'}$; $y'=(x'-x'')^2$, $y''=(x'-x''')^2$, $y'''=(x''-x''')^2$. Essendo in questo caso t, ed y funzioni simili, istituisco il calcolo del (N.° 144), e ottenendo l' Equazione $t^3+\frac{54}{5}t^2+$

$33\,t + 20 = 0$, in seguito $H\,1 = 74$, $H\,2 = \frac{-1514}{5}$, $H\,3 = \frac{36506}{25}$, e finalmente $N = 74$, $P = \frac{2482}{5}$, $Q = 632$, avremo $y = \dfrac{74\,t^2 + \frac{2482}{5}t + 632}{3\,t^2 + \frac{108}{5}t + 33}$.

Ripongo in questa espressione i tre valori t', t'', t''', e dovrei così pel (N.° 144) ricavare i tre y', y'', y'''; ma vedremo per la precedente osservazione così non succedere. Avendosi $x' = 2$, $x'' = -2$, $x''' = 5$, ne verrà $t' = -\frac{4}{5}$ $t'' = -5$, $t''' = -5$. Sostituisco il primo di questi valori, e ci risulterà

$$y' = \frac{74 \times \frac{16}{25} + \frac{2482}{5} \times -\frac{4}{5} + 632}{3 \times \frac{16}{25} + \frac{108}{5} \times -\frac{4}{5} + 33} = 16;$$

colloco l' altro, e ricaveremo

$$y'' = \frac{74 \times 25 + \frac{2482}{5} \times -5 + 632}{3 \times 25 + \frac{108}{5} \times -5 + 33} = \frac{0}{0} = 29$$

(N.° 140). Ora abbiamo in tal guisa ottenuto bensì il valore della y', ma non già quello delle y'', y''', poichè è facile a vedersi, che deve essere $y' = 16$, $y'' = 9$, $y''' = 49$. Come dunque opereremo, onde ottenere dalla $t'' = t''' = -5$ que-

sti

sti due valori y'', y'''? Suppongo perciò l' Equazione $y^2 + gy + h = 0$, e rinnovate sui coefficienti g, h le operazioni del (N.° 147), troveremo essere questi uguali a due funzioni della t, e dei coefficienti della data, nelle quali supponendo $t = t'' = t''' = -5$, ricaveremo $g = -58$, $h = 441$. Sostituisco questi valori, e l' Equazione $y^2 - 58y + 441 = 0$ risolta ci darà le due radici $y'' = 9$, $y''' = 49$.

153. Nella stessa guisa del (N.° prec.) se a cagione di certe relazioni particolari fra le x', x'', x''', ec. tre dei valori della t riuscissero uguali fra loro, se per esempio fosse $t'' = t''' = t^{\text{IV}}$, la determinazione delle corrispondenti y'', y''', y^{IV} dipenderebbe dall' Equazione di terzo grado $y^3 + gy^2 + hy + i = 0$, essendo i coefficienti g, h, i determinabili razionalmente per t'', e i coefficienti della data. Lo stesso si dice, se per la stessa ragione quattro dei valori della t fossero uguali fra loro, e così in progresso.

154. Ma come faremo noi per conoscere, se l' Equazione $T = t^n + pt^{n-1} + qt^{n-2} + \text{ec.} = 0$ à due, o più radici uguali fra loro? Potremo facilmente dedurlo dai seguenti Teoremi.

1.° Supponghiamo, che l' Equazione generale $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{ec.} = 0$ abbia due delle sue radici uguali fra loro, che sia per esempio $\alpha = \beta$ (N.° 21); in tal caso il risultato $m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3} + \text{ec.}$ del (N.° 60) dico che dovrà essere uguale allo zero.

 Que-

Questo è evidente dal (cit.° N.° 60), osservando, che abbiamo $m\alpha^{m-1}+(m-1)A\alpha^{m-2}+(m-2)B\alpha^{m-3}+$ ec. $=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\eta)\ldots\ldots$

2.° Se tre delle radici della $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+$ ec. $=0$ sono uguali fra loro, cioè se sia $\alpha=\beta=\gamma$, dovrà essere uguale allo zero non solo la quantità $m\alpha^{m-1}+(m-1)A\alpha^{m-2}+(m-2)B\alpha^{m-3}+$ ec., ma anche l' altra $m(m-1)\alpha^{m-2}+(m-1)(m-2)A\alpha^{m-3}+(m-2)(m-3)B\alpha^{m-4}+$ ec.

Giacchè abbiamo $m\alpha^{m-1}+(m-1)A\alpha^{m-2}+(m-2)B\alpha^{m-3}+$ ec. $=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\eta)\ldots$, è chiaro che la $mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+$ ec. $=0$ sarà un' Equazione avente due radici uguali ad α. Dunque pel (1.° prec.) replicando sulla $mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+$ ec. $=0$ l' operazione istessa, che si praticò nel (N.° 60) sulla $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+$ ec. $=0$, troveremo facilmente, che deve risultare $m(m-1)\alpha^{m-2}+(m-1)(m-2)A\alpha^{m-3}+(m-2)(m-3)B\alpha^{m-4}+$ ec. $=0$. Dunque ec.

3.° Se sia $\alpha=\beta=\gamma=\delta$, oltre i due risultati del (2.° prec.) dovrà essere uguale allo zero anche il terzo $m(m-1)(m-2)\alpha^{m-3}+(m-1)(m-2)(m-3)A\alpha^{m-4}+(m-2)(m-3)(m-4)B\alpha^{m-5}+$ ec.

Ciò si dimostra nella maniera medesima del (prec. 2.°); e così si prosegue nei casi di cinque, sei, ec. radici uguali.

155.

155. Riportando ora queste proprietà alla $T = o$, se nella ipotesi di $t = t''$ vedrò risultare $n t^{n-1} + (n-1) p t^{n-2} + (n-2) q t^{n-3} +$ ec., cioè il denominatore della (M) uguale allo zero, dirò che la $T = o$ à già due radici $= t''$; dirò che essa ne à tre, se nella stessa supposizione di $t = t''$, oltre $n t^{n-1} + (n-1) p t^{n-2} +$ ec. vedrò che diviene uguale allo zero anche $n(n-1) t^{n-2} + (n-1)(n-2) A t^{n-3} + (n-2)(n-3) B t^{n-4} +$ ec., e così in progresso. Dunque nel primo caso, onde avere i due valori di y, che corrispondono a t'', supporrò l' Equazione $y^2 + g y + h = o$, nel secondo supporrò $y^3 + g y^2 + h y + i = o$, e così di seguito.

156. Per isciogliere finalmente il nostro Problema (N.° 142), nell' ultimo dei tre casi (N.° 146) non avremo che da servirci del metodo indicato ai (N.[i] 147, 149, 150, 153) pel caso secondo. Imperciocchè quantunque i valori diversi della y siano di un numero summultiplo di π, pure considerando in essa y tutte le permutazioni possibili, è chiaro che tenendosi così conto di tutti i valori di questa funzione uguali, o disuguali fra loro, risulteranno essi di numero π; ma, come vedemmo succedere rapporto al primo caso (N.° 146), l' esistere dei valori della y uguali non porta alcuna variazione nella soluzion del Problema (N.° 144). Dunque qualunque variazione nascendo soltanto dall' uguaglianza fra i valori della t, ossia dall' essere i valori diversi della t summultipli

tipli di π, ne viene che, generalmente parlando, questo terzo caso devesi perfettamente ridurre al secondo.

157. Finora abbiamo supposto, che le funzioni t, y siano razionali; passiamo ora a considerare, come possa sciogliersi il nostro Problema (N.° 144), mentre una, o amendue queste funzioni sono irrazionali. Se sia incommensurabile la t, e non già la y, ritrovata pel (N.° 136) l'Equazione in t, le operazioni da praticarsi per la determinazione delle y sono perfettamente le medesime, che quelle dei (N.^{i} 144, 147, 151), avvertendo però, che quì pure siccome nei (N.^{i} 146, 156) da' diversi valori della t anderan risultando dei valori della y uguali.

158. Cangiata nelle Equazioni (*III*) del (N.° 136) la y in t, è chiaro che tutte le p radici della prima di tali Equazioni non ci daranno, che un solo valore della nostra y (N.° 144), il valore per esempio y'; tutte le p radici della Equazione seconda ci daranno solamente il valore y'', tutte le radici della terza ci daranno il solo y''', e così di seguito.

159. Supposta pertanto la t della forma $f(x', x'', x''', \ldots x^{(m)})$, sia essa razionale, o irrazionale, se vorremo dipendentemente da questa determinare i π valori della y (N.° 146), è evidente dai (N.^{i} 146, 157), che dovremo sempre cadere a dover risolvere un' Equazione in y del grado π, in cui tutti si conterranno questi π valori.

160.

160. Essendo razionale la $t = f(x')(x'')(x''')\ldots\ldots$, supponghiamo incommensurabile la $y = \varphi(x')(x'')(x''')\ldots\ldots$, ed esprima μ il numero dei valori diversi, che nascono da quest' ultima funzione per le diverse permutazioni fra le x', x'', x''', ec..... Tolgo sul bel principio dalla supposta $y = \varphi(x')(x'')(x''')\ldots$ gli irrazionali (N.° 136), e ottenuta così l' Equazion razionale $y^p + F' y^{p-1} + G' y^{p-2} + H' y^{p-3} + \text{ec.} = 0$ (N.° 136), prendo a considerare in essa il coefficiente F'. Essendo questo coefficiente pel (N.° 135) una funzion razionale delle x', x'', x''', ec. avente dalle permutazioni un numero μ di valori diversi, ricerco con i metodi precedenti (N.i 144, 147, 150) il valor generale della F espresso con la t; trovato questo, suppongo successivamente $t = t', t'', t'''$, ec., e per tal modo è chiaro che ci risulteranno i coefficienti F', F'', F''', ec. della (*I*) (N.° 136). Considerando in seguito gli altri coefficienti G', H', ec., poichè essi non sono che tante funzioni delle x', x'', x''', ec. simili alla F', e razionali (N.° 136); soppressi gli apici, esprimo mediante la formola generale (M) (N.° 144) ciascuno dei medesimi col mezzo della F; nelle espressioni, che ne vengono, suppongo poscia $F = F', F'', F'''$, ec., e otterremo così i valori degli altri coefficienti tutti G', G'', G''', ec.; H', H'', H''', ec. ec.. Sostituisco questi nelle Equazioni (*III*) del (N.° 136), e determinate in simil guisa tali Equazioni, la loro

solu-

soluzione i valori ci somministrerà domandati della y.

161. Data per esempio l' Equazione $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ del (N.° 143), in cui abbiamo $x' = 4$, $x'' = 2$, $x''' = -3$, e supposto $t' = x' + x''$, vogliasi $y = x'x'' + 3\sqrt{x'''}$. Togliendo pei (N.i prec.) da questa ultima Equazione i radicali, ne verrà $y^2 - 2x'x''y + x'^2x''^2 - 9x''' = 0$, onde avremo $F' = -2x'x''$, $G' = x'^2x''^2 - 9x'''$. Cercando ora da t il valore di F, osservo che abbiamo $x'x'' = -\frac{F'}{2}$; dunque senza fare tutto il calcolo del (N.° 144), giacchè pel (N.° 106) l' Equazione in t si è la $t^3 - 6t^2 - t + 6 = 0$, dal (cit. N.° 143) ne viene, che sarà $-\frac{F}{2} =$ $\frac{-10t^2 + 102t + 28}{3t^2 - 12t - 1}$, e però $F =$ $\frac{20t^2 - 204t - 56}{3t^2 - 12t - 1}$; sostituisco quivi successivamente i valori $t' = 6$, $t'' = 1$, $t''' = -1$, e otterremo $F' = -16$, $F'' = 24$, $F''' = 12$.

Affine presentemente di determinare i coefficienti G', G'', G''', formo l' Equazione in F, cioè la $F^3 + pF^2 + qF + r = 0$, essendo $p = -20$, $q = -288$, $r = 4608$; ma abbiamo

$H1 = G' + G'' + G''' = 217$,

$H2 = F'G' + F''G'' + F'''G''' = 1568$,

$H3 = F'^2G' + F''^2G'' + F'''^2G''' = 95872$,

e perciò

N =

$N = H1 = 217$,
$P = H1p + H2 = -2772$,
$Q = H1q + H2p + H3 = 2016$.
Dunque sostituendo nella formola generale (M), sarà $G = \frac{217F^2 - 2772F + 2016}{3F^2 - 40F - 288}$, e riponendo in luogo della F i suoi valori, otterremo $G' = 91$, $G'' = 126$, $G''' = 0$. Pertanto le (*III*) Equazioni del (N.° 136) diverranno nel nostro caso $y^2 - 16y + 91 = 0$, $y^2 + 24y + 126 = 0$, $y^2 + 12y = 0$, e i sei valori della y, che dalla soluzione di queste si ricavano, quelli saranno, che richiedevansi dal Problema.

162. I valori dei coefficienti G', G'', G''', ec.; H', H'', H''', ec. ec. non si potevano essi pure dedurre immediatamente dalla t, senza ricorrere ai valori della F (N.° 160)? Per la soluzion del Problema non solo è necessario conoscere i valori tutti delle G, delle H, ec.; ma bisogna di più tra questi conoscere quali son quei, che corrispondono ai valori diversi della F. Ora se F, t sono funzioni simili, in tal caso è chiaro dal (N.° 144), che troverò il valore per esempio G' corrispondente ad F', tanto deducendolo da t', come da F'; ma se F, t sono due funzioni dissimili, cosicchè al solo valore t' due o tre ne corrispondano della F (N.° 147), risulterà in allora per la sola F' un' Equazione di secondo, o terzo grado (cit. N.° 147); ora essendo G una funzione simile alla F, se vorrò dalla t' ricavare

il valore G', ritroverò per esso pure un' Equazione di secondo, o terzo grado; e le radici di questa corrisponderanno alle radici della Equazione trovata per F. Ma da queste due Equazioni determinate potremo noi conoscere precisamente quali sono i singoli valori della G, che a quei corrispondono della F? E' evidente che nò. In conseguenza adunque di questo abbiamo stabilito nel (N.° 160), che ciascun valore della G deducasi dal corrispondente della F, e che lo stesso pure si pratichi rapporto agli altri coefficienti H, ec..

163. Resta finalmente a considerarsi il caso, in cui amendue le funzioni z, y suppongonsi irrazionali. Ora l' essere la z incommensurabile non porta, come si osservò nel (N.° 158), alcuna variazione nel calcolo; dunque tutta la variazione dipendendo soltanto dalla irrazionalità della y, ne segue, che quest' ultimo caso riducesi infine totalmente all' altro del (N.° 160).

Prima di terminar questo Capo, fa d' uopo, che dimostriamo il seguente Teorema.

164. Col mezzo di un solo dei valori della funzione $z = f(x')(x'')(x''')(x^{\text{v}})\ldots\ldots$, tutti possiamo determinare i valori della funzione $y = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{\text{v}})\ldots\ldots$

Siano per ora le due funzioni z, y simili, e razionali, e i diversi loro valori provenienti dalle varie permutazioni siano i seguenti

$z' =$

$$t' = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})\ldots\ldots,$$
$$y' = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{IV})\ldots\ldots;$$
$$t'' = f(x'')(x')(x''')(x^{IV})\ldots\ldots,$$
$$y'' = \varphi(x'')(x')(x''')(x^{IV})\ldots\ldots;$$
$$t''' = f(x''')(x'')(x')(x^{IV})\ldots\ldots,$$
$$y''' = \varphi(x''')(x'')(x')(x^{IV})\ldots\ldots;$$
$$t^{IV} = f(x')(x''')(x'')(x^{IV})\ldots\ldots,$$
$$y^{IV} = \varphi(x')(x''')(x'')(x^{IV})\ldots\ldots;$$
$$t^{V} = f(x'')(x''')(x')(x^{IV})\ldots\ldots,$$
$$y^{V} = \varphi(x'')(x''')(x')(x^{IV})\ldots\ldots;$$
$$t^{VI} = f(x''')(x')(x'')(x^{IV})\ldots\ldots,$$
$$y^{VI} = \varphi(x''')(x')(x'')(x^{IV})\ldots\ldots;$$

ec. ec.

Mentre nel (N.° 144) abbiam voluto dipendentemente dai valori della t trovare quei della y, abbiamo nella determinazione delle quantità H 1, H 2, H 3, ec. combinate le funzioni t', t'', t''', ec.; y', y'', y''', ec. tra loro in modo, che corrispondendo t' ad y', e però t'' ad y'', t''' ad y''', ec., ne è risultata la (M) tale, che al sostituire di t' si ottiene necessariamente y', al sostituire t'' si à y'', al porre $t = t'''$ ne risulta y''', e così di seguito. Ma è chiaro, che potevamo da principio supporre, che a t' corrispondesse non già y', ma bensì y'', in allora a t'' avrebbe corrisposto y', a t''' avrebbe corrisposto y^{V}, a t^{IV}, y^{VI}, ec.; e fatte le Equazioni

$$y'' + y' + y^{v} + y^{vi} + \text{ec.} = H\,1,$$
$$t'y'' + t''y' + t'''y^{v} + t^{iv}y^{vi} + \text{ec.} = H\,2,$$
$$\text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}$$

avremmo coi noti metodi ottenuti certi valori delle H 1, H 2, H 3, ec., i quali ci avrebber condotti ad una Equazione (M) tale, che facendo successivamente $t = t', t'', t''', t^{v}$, ec, ne sarebbe risultato corrispondentemente $y = y'', y', y^{v}, y^{vi}$, ec.; onde in questo caso mediante t' si avrebbe avuto y''. Se a t' si fosse supposto corrispondere y''', in allora a t'', avrebbe corrisposto y^{vi}, a t''', y', a t^{iv}, y^{v}, ec., e operato come precedentemente, saremmo arrivati nel modo di prima all' Equazione (M), nella quale ponendo i valori t', t'', t''', t^{iv}, ec., ne sarebbe successivamente risultato $y = y''', y^{vi}, y', y^{v}$, ec.; e però da t' avremmo ottenuto il valore y'''. Proseguendo così a supporre, che a t' corrispondano le funzioni, che restano y^{iv}, y^{v}, y^{vi}, ec., vedesi che potremo mediante la stessa t' determinare ciascuna delle y', y'', y''', y^{iv}, y^{v}, y^{vi}, ec., trovando però corrispondentemente ad ognuna di queste tante nuove Equazioni della forma della (M). Dunque ec.

Che se le due funzioni t, y sono fra loro dissimili, o sono irrazionali, il Teorema si dimostra nella maniera medesima.

165 Avvi un caso, il quale sfugge dal precedente Teorema, e tale si è quello, che segue.

Sia $t' = f(x')(x'')(x''') \ldots\ldots (x^{(\lambda)})$, e sia $y' = (x^{(\lambda+1)})(x^{(\lambda+2)})(x^{(\lambda+3)}) \ldots\ldots (x^{(m)})$,

co-

cosicchè niuna delle radici esistenti nella funzione y' entri nella funzione t', in tal caso io dico, che essendo le x', x'', x''', ec. radici di un' Equazion generale (D), dalla t' non potremo dedurre il valore della y'.

Se far si potesse una simile deduzione, dovendo risultare $y' = f(t')$ (N.° 144.), esister dovrebbe un rapporto tra queste quantità y', t'. Ma le x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$ essendo radici di un' Equazione generale, devono prescindere da qualunque relazione fra loro. Dunque le radici componenti la t' essendo tutte diverse dalle radici della y', non potrà neppure considerarsi, che esista alcun rapporto tra le t', y' medesime, e non potrà per conseguenza dalla t' dedursi la y'.

166. Se restando $t' = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)})$, abbiasi $y' = x'$; esistendo in questa supposizione la x' nella t', esister dovrà un rapporto tra essa $x' = y'$, e la t', dunque in questo caso sarà quella sempre determinabile da questa, e potrem quindi sempre ottenere $y' = x' = f(t')$. Dal (N.° precedente) è chiaro, che non potremo già eseguire una simile determinazione, se sia $y' = x^{(\lambda+1)}$.

167. Ritenuto $t' = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)})$, supponghiamo $u' = \varphi(x')(x^{(\lambda+2)})(x^{(\lambda+3)}) \ldots (x^{(m)})$. Cercando pel (N.° prec.) sì dalla t', che dalla u' il valore della x', giunger potremo alle due Equazioni $x' = f'(t')$, $x' = f''(u')$, e però

rò all' altra $f''(u') = f'(t')$. Ma questa sciolta, considerando la u' come incognita, ci somministra evidentemente $u' = f'''(t')$. Dunque quando nelle due t', u' esiste una radice comune x', e molto più quando ne esistono varie, l' una funzione in allora è sempre determinabile dall' altra.

168. Facendo nella y' del (N.° 165) le varie permutazioni tra i diversi valori della x, una di quelle eseguiscasi, per cui in essa s' introduca una, o più delle radici, x', x'', ec. $x^{(\lambda)}$, facciasi quella per esempio di $x^{(\lambda+1)}$ in x', e sia $y'' = \varphi(x')(x^{(\lambda+2)})(x^{(\lambda+3)}).....(x^{(m)})$. Poichè pel (N.° prec.) questa y'' è d terminabile dalla t', ne viene evidentemente, che se da essa t' non è deducibile la y' (N.° 165), pure lo sarà sempre uno, o più altri valori da essa dedotti, come nel caso presente la y'', e per conseguenza qualunque siansi le funzioni t, y, avrà sempre luogo la soluzion del Problema del (N.° 142), e avrà pur luogo il Teorema del (N.° 164), ogniqualvolta dal dato valor della t, cioè da t' quei valori si cerchino della y, in cui esiste una, o più delle radici esistenti nella t' istesa.

CA-

CAPO NONO.

Alcune Proprietà delle Radici reali, ed immaginarie nelle Equazioni Algebraiche.

169. Supposta un' Equazione di grado pari $x^{2n} + A x^{2n-1} + B x^{2n-2} +$ ec. $= 0$, e fatta con le sue radici una funzione della forma

$r = f\left((x', x'', x''', \ldots\ldots x^{(n)}) - (x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \ldots\ldots x^{(2n)})\right)$, in cui le $x^{(n+1)}$, $x^{(n+2)}$, $x^{(n+3)}$, ec., $x^{(2n)}$ siano combinate fra loro, come lo sono fra loro le x', x'', x''', ec., $x^{(n)}$, come sarebbe per esempio nella ipotesi di $n = 3$, la $r = (x' + x'' + x''') - (x^{\text{iv}} + x^{\text{v}} + x^{\text{vi}})$; i valori di questa io dico, che sono tutti fra loro uguali a due a due, e di segno contrario.

Trasportando nella r tutte le radici contenute sotto la prima parentesi entro della seconda, e le radici della seconda trasportandole entro della prima, ne verrà la funzione

$f\left((x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \ldots\ldots x^{(2n)}) - (x', x'', x''', \ldots\ldots x^{(n)})\right)$, e nell' esempio la $(x^{\text{iv}} + x^{\text{v}} + x^{\text{vi}}) - (x' + x'' + x''')$; ma questa è uguale evidentementemente alla supposta, cangiatone il segno. Dunque due dei valori della r essendo già tra loro uguali, e di segno contrario, rinnovato il discorso del (N.° 97), troveremo, che anche gli altri tutti aver dovranno no la proprietà medesima, e però ec.

170. Ne segue adunque, che i valori della r sono di numero pari, e giacchè questo numero è $= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)n\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots n.1.2.3\ldots\ldots n} =$ $\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}$ (N.° 102), chiamato esso per brevità 2ω, avremo $\omega = \frac{n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}$ = numero intiero, e i valori tutti della r si esprimeranno per $r', r'', r''', \text{ec.}, r^{(\omega)}, -r', -r'', -r''', \text{ec.}, -r^{(\omega)}$. Nel caso di $n=3$ avremo $\omega = \frac{3.5.4}{1.2.3} = 10$.

171. Se nella r lasciamo la x' sempre al suo luogo, e facciamo tutte le possibili permutazioni fra le altre radici, i valori, che ne vengono, possono rappresentarci i precedenti ω valori r', r'', r''', ec., $r^{(\omega)}$.

Con la operazione ora supposta non venghiamo, che a determinare una parte di tutti i precedenti 2ω valori della r, e quali essi siano, prendiamo presentemente a considerare. Restando per la ipotesi la x' immutabile, le quantità da permutarsi nella r diveranno in numero di $2n-1$. Ma per la forma della r, il numero delle permutazioni fra le $2n-1$ radici è

$$= \frac{(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)(n)(n-1)\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots n.1.2.3\ldots(n-1)} = n$$

$$=\frac{n(2n-1)(2n-2)\ldots\ldots(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots\ldots n}\ (\text{N.° }102)\,.$$

Dunque essendo questo risultato $=\omega$ (N.° prec.), di numero ω saranno i valori, che ottengonsi dalla r per le permutazioni supposte. Di più restando la x' sempre al suo luogo, e però sempre positiva, nessuno di questi ω valori può giammai essere uguale, e opposto di segno ad un altro qualunque dei medesimi. Dunque ec.

Facendo $n=3$, giacchè ne viene $\omega=10$ (N.° prec.), avremo nel solito esempio (N.° 169)

$$r'=(x'+x''+x''')-(x^{IV}+x^{V}+x^{VI}),$$
$$r''=(x'+x^{IV}+x''')-(x''+x^{V}+x^{VI}),$$
$$r'''=(x'+x^{V}+x''')-(x^{IV}+x''+x^{VI}),$$
$$r^{IV}=(x'+x^{VI}+x''')-(x^{IV}+x^{V}+x''),$$
$$r^{V}=(x'+x''+x^{IV})-(x'''+x^{V}+x^{VI}),$$
$$r^{VI}=(x'+x''+x^{V})-(x^{IV}+x'''+x^{VI}),$$
$$r^{VII}=(x'+x''+x^{VI})-(x^{IV}+x^{V}+x'''),$$
$$r^{VIII}=(x'+x^{IV}+x^{V})-(x''+x'''+x^{VI}),$$
$$r^{IX}=(x'+x^{IV}+x^{VI})-(x''+x^{V}+x'''),$$
$$r^{X}=(x'+x^{V}+x^{VI})-(x^{IV}+x''+x''').$$

172. Se vogliansi nella r lasciare nel loro luogo le due x', x'', e permutare tutte le altre $2n-2$ radici, che rimangono, i valori, che ne derivano, saranno contenuti fra i precedenti r', r'', r''', ... $r^{(\omega)}$, e dal (N.° 102) è chiaro, che il loro numero è $=\dfrac{(2n-2)(2n-3)\ldots\ldots3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-2)}=$

(2 n

$\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots.(n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)}$. Nel precedente esempio tal numero diviene $=4$, e i corrispondenti valori sono r', r^{v}, $r^{v'}$, $r^{v''}$.

173. Cangiamo la x' in x'' in tutti gli ω valori del (N.° 171). Per simili permutazioni altri di questi valori restano perfettamente i medesimi, e tali sono gli accennati nel (N.° prec.), ed altri pel (N.° 169) non fanno perciò, che cangiarsi fra loro, cangiando nel tempo stesso di segno. Ora volendo determinare il numero di questi ultimi valori, sottraggo dal Numero

$$\omega = \frac{n(2n-1)(2n-2)\ldots.(n+1)}{1.2.3\ldots..n}$$ l'altro

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots.(n+1)}{1.2.3\ldots.(n-2)}$$ (N.° prec.), e il

valore $$\frac{(2n-1)(n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots..(n-1)} -$$

$$\frac{(n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots.(n+1)}{1.2.3\ldots..(n-1)} =$$

$$\frac{(2n-1-n+1)(2n-2)(2n-3)\ldots.(n+1)}{1.2.3\ldots.(n-1)} =$$

$$\frac{n(2n-2)(2n-3)\ldots.(n+1)}{1.2.3\ldots..(n-1)} =$$

$$\frac{2(2n-3)(2n-4)\ldots.(n+1)n}{1.2.3\ldots.(n-2)}$$ sarà il richiesto.

Nel nostro esempio, a cagione di $n=3$, questo numero sarà $= 2\,\frac{3}{1} = 6$.

174.

174. Il ritrovato $\frac{2(2n-3)(2n-4)\ldots(n+1)n}{1.2.3\ldots(n-2)}$ è sempre un numero pari.

Suppongo $2n-3=p$, $n-2=q$; avendosi quindi con la sottrazione $n-1=p-q$, e però $n=p-(q-1)$, $n+1=p-(q-2)$, sostituisco questi valori nel numero $\frac{(2n-3)(2n-4)\ldots(n+1)n}{1.2.3\ldots(n-2)}$, ed esso diverrà $\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-(q-2))(p-(q-1))}{1.2.3\ldots.q}$. Ora dalla sola ispezione della formola Newtoniana vedesi altro non essere questo numero, se non che il coefficiente del termine $q+1$ *esimo* di un binomio $a+b$ elevato alla potenza p. Dunque dovendo tutti i coefficienti della formola Newtoniana essere numeri interi, tale sarà anche il numero $\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-(q-2))(p-(q-1))}{1.2.3\ldots q}$, ossia $\frac{(2n-3)(2n-4)\ldots(n+1)n}{1.2.3\ldots(n-2)}$; e però il precedente $2\,\frac{(2n-3)(2n-4)\ldots(n+1)n}{1.2.3\ldots(n-2)}$ non sarà, che un numero pari. C.d.d.

175. Se facciamo il prodotto $r'r''r'''\ldots r^{\omega}$, sarà questo sempre determinabile razionalmente pei coefficienti A, B, C, ec. della data.

Formato questo prodotto, esso è già tale evi-

 den-

dentemente, che una qualunque delle permutazioni indicate nel (N.° 171) non può produrre in lui variazione veruna. Facciasi ora nel medesimo la permutazione di x' in x''. Per lo (N.° 173) altre delle r', r'', r''', ec., $r^{(\omega)}$ non si cangiano perciò in modo veruno, le altre tutte non fanno, che cangiarsi fra loro, cambiando nel tempo stesso di segno, e queste ultime frattanto sono pel (N.° 174) di numero pari: dunque il nostro prodotto $r'r''r'''\ldots r^{(\omega)}$ è tale, che pel cambiamento di x' in x'' non si altera punto, nè rapporto al valore, nè rapporto al segno. Ma quello, che si è detto della permutazione di x' in x'', dicesi egualmente di qualunque altro cangiamento fra le x', x'', x''', ec., $x^{(2n)}$. Dunque il suddetto prodotto, conservando sempre e lo stesso valore, e lo stesso segno, qualunque permutazione si faccia, sarà sempre determinabile razionalmente pei coefficienti A, B, C, ec. della data (N.° 101).

176. Se vogliasi formare un' Equazione in r avente per radici tutti i valori r', $-r'$, r'', $-r''$, r''', $-r'''$, ec. del (N.° 170); questa sarà priva di tutte le potenze dispari della r.

Pel (N.° 22) il primo membro dell' Equazione da formarsi è $=(r-r')(r+r')(r-r'')(r+r'')$ $(r-r''')(r+r''')\ldots(r-r^{(\omega)})(r+r^{(\omega)})=$ $(r^2-r'^2)(r^2-r''^2)(r^2-r'''^2)\ldots(r^2-r^{(\omega)2})$; ma in questo non entrano che le potenze pari della r. Dunque ec.

Supposto $r^2=u$, sostituisco, effettuo la molti-

pli-

plicazione, e il calcolo del N.° 105), e ci verrà un'
(I) Equazione $u^{\omega} + R\,u^{\omega-1} + S\,u^{\omega-2} + \text{ec.} + V = 0$, di cui saranno radici le quantità $u' = r'^2$, $u'' = r''^2$, $u''' = r'''^2$, ec.

177. Se sia ω numero dispari, la (*I*) avrà necessariamente l' ultimo termine V negativo.

Il prodotto $r' r'' r''' \ldots r^{(\omega)}$ è sempre una quantità razionale (N.° 175), e però il suo quadrato $(r' r'' r''' \ldots r^{(\omega)})^2$ una quantità essenzialmente positiva. Dunque essendo la (*I*) per la ipotesi un' Equazione di grado dispari, e avendosi quindi pel (N.° 74) $V = -u' u'' u''' \ldots u^{(\omega)} = -(r' r'' r''' \ldots r^{(\omega)})^2$, ne segue, che ec.

178. Nella ipotesi adunque di ω numero dispari avendo sempre la u per lo meno un valore reale positivo (N.° 54), sostituendo questo in un' Equazione $r^2 = u$ (N.° 176), ne otterremo sempre $r = \sqrt{u} =$ ad una quantità reale.

179. Ritenendo, che ω sia numero dispari, se vorremo mediante la r pel (N.° 142) determinare il valore di un' altra funzione qualunque a lei simile, che chiamerò s, troveremo, che corrispondentemente a tutti, o ad alcuno dei valori reali della r, purchè non sia zero, esiste sempre per lo meno un valore reale della s.

O i valori reali della r sono tutti disuguali fra loro, o nò. Nel primo di questi due casi la cosa è per se evidente, corrispondendo per la formola (M) a ciascun valore reale della r un valore reale della s. Nel secondo poi osservo da prima, ma, che essendo la (I) un' Equazione di grado dispari avente l' ultimo termine negativo (N.° 177), dovrà essa avere un numero dispari di radici reali positive (N.° 58). Supponghiamo, ciò posto, che tra queste radici reali positive ve ne abbiano delle uguali fra loro; tali radici uguali, o sono dispari di numero, o sono pari; nel primo di questi due casi è chiaro potersi dare, che delle radici reali positive non ne rimanga nell' Equazione (I) alcuna disuguale, ma ciò non può già darsi nel secondo. Ora a cagione di $r = \sqrt{u}$, ciò stesso, che abbiamo osservato nei valori reali positivi della u, deve in corrispondenza succedere anche tra i valori reali della r. Dunque o col mezzo dei valori reali uguali di essa r, se sono dispari, o se sono pari, col mezzo di quelli, che devono necessariamente rimaner disuguali, se cercherò i valori corrispondenti della s, questi pei (N.[i] 144, 147, 151) venendo sempre a dipendere da Equazioni di grado dispari, dovranno sempre avere per lo meno un valore reale (N.° 54). Dunque ec.

180. Il primo membro di qualunque Equazione Algebraica di un grado maggiore del secondo è sempre composto di due fattori, i coefficienti dei quali sono quantità reali.

Se l' Equazione proposta è di grado dispari, sapendosi che questa à sempre una radice reale (N.° 54), chiamata α una tal radice, ed $x^{2m+1} + A x^{2m} + B x^{2m-1} + \text{ec.} = 0$ l' Equazione pro-

po-

posta, dividendo essa pel binomio $x-\alpha$, la decomporremo così nei due fattori $x-\alpha$, $x^{2m}+(\alpha+A)x^{2m-1}+(\alpha^2+A\alpha+B)x^{2m-2}+(\alpha^3+A\alpha^2+B\alpha+C)x^{2m-3}+$ ec. (N.° 33), in cui i coefficienti sono evidentemente reali.

181. Se poi l' Equazione data sia la (D) (N.° 17), e sia d' un grado pari >2, supponghiamo, che $x^n+Mx^{n-1}+Nx^{n-2}+Px^{n-3}+$ ec. (II)
ci rappresenti uno dei suoi fattori; l' altro fattore sarà della forma $x^{m-n}+M'x^{m-n-1}+N'x^{m-n-2}+P'x^{m-n-3}+$ ec., e converrà dimostrare, che tutti i coefficienti M, N, P, ec.; M', N', P', ec. sono quantità reali; dimostrato ciò dei primi, sarà dimostrato ancor dei secondi, giacchè questi si determinano, dividendo la (D) pel fattore (*II*): resta dunque a provare, che i coefficienti M, N, P, ec. siano quantità reali.

Giacchè l' esponente m è un numero pari, avremo sempre $m=2^b i$, essendo i un numero dispari qualunque; ora o $i>1$, o $i=1$; prendiamo a considerare questi due casi nei numeri, che seguono.

182. Sia primieramente $i>1$. Avendosi $M=-(x'+x''+x'''+\ldots+x^{(n)})=f(x',x'',x''',\ldots x^{(n)})$, sappiamo dal (N.° 104), che sarà questa Funzione determinabile per un' Equazione del grado $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}=$

$$\frac{2^b i(2^b i-1)(2^b i-2)(2^b i-3)\ldots(2^b i-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n},$$

che

che chiamerò π. Se dunque suppongasi $n = 2^h$ avremo

$$\pi = \frac{2^h i(2^h i - 1)(2^h i - 2)(2^h i - 3)\ldots(2^h i - 2^h + 1)}{2^h(2^h - 1)(2^h - 2)(2^h - 3)\ldots 2 \,.\, 1},$$

ossia dividendo per 2 quante volte si può i fattori corrispondenti del numeratore, e del denominatore, sarà

$$\pi = \frac{i(2^h i - 1)(2^{h-1} i - 1)(2^h i - 3)(2^{h-2} i - 1)\ldots(2^h i - 2^h + 1)}{(2^h - 1)(2^{h-1} - 1)(2^h - 3)(2^{h-2} - 1)\ldots 1 \,.\, 1},$$

ove si vede, che, non racchiudendo il numeratore, e il denominatore che dei numeri dispari, fatta la divisione si avrà necessariamente il quoziente π numero dispari.

Dunque il coefficiente M del fattore (*II*) dipendendo da un' Equazione di grado dispari, avrà necessariamente almeno un valore reale, e però tenendo conto di questo, il supposto fattore avrà di già il coefficiente M del secondo termine reale. Ora essendo gli altri coefficienti N, P, ec. funzioni delle x', x'', x''', ec. simili alla M, potremo dipendentemente da M determinare ciascuno di essi (N. 144), e ciascuno avrà uno, o più valori reali corrispondentemente ai valori reali di M. Dunque il fattore (*II*) oltre il coefficiente M avendo ancora reali tutti gli altri N, P, ec., ne viene che il primo membro dell' Equazione (D) sarà composto dei due fattori reali

$x^n + M x^{n-1} + N x^{n-2} + P x^{n-3} + \text{ec.}$,

$x^{m-n} + M' x^{m-n-1} + N' x^{m-n-2} + P' x^{m-n-3} + \text{ec.}$,

es-

essendo in essi $n=2^b$, ed $m=2^b i$, ove i è numero dispari, e >1.

183. Se poi $i=1$, cosicchè $m=2^b$, sarà la data composta dei due fattori

$$(III)\quad \begin{cases} x^n+Mx^{n-1}+Nx^{n-2}+Px^{n-3}+\text{ec.}, \\ x^n+M'x^{n-1}+N'x^{n-2}+P'x^{n-3}+\text{ec.}, \end{cases}$$ avendosi $n=\frac{m}{2}=\frac{2^b}{2}=2^{b-1}$, ed i coefficienti tutti reali.

Difatti supposte x', x'', x''', ec., $x^{(n)}$ le radici del primo fattore, $x^{(n+1)}$, $x^{(n+2)}$, $x^{(n+3)}$, ec., $x^{(2n)}$ le radici del secondo, supponghiamo

$$M=\frac{\alpha+\mu}{2},\ N=\frac{\beta+\nu}{2},\ P=\frac{\gamma+\pi}{2},\ \text{ec.},$$

$$M'=\frac{\alpha-\mu}{2},\ N'=\frac{\beta-\nu}{2},\ P'=\frac{\gamma-\pi}{2},\ \text{ec.},$$

avremo quindi

$$\alpha=M+M'=-\big((x'+x''+x'''+\ldots+x^{(n)}) \\ +(x^{(n+1)}+x^{(n+2)}+x^{(n+3)}+\ldots+x^{(2n)})\big),$$

$$\beta=N+N'=\big((x'x''+x'x'''+x''x'''+\ldots \\ +x^{(n-1)}x^{(n)})+(x^{(n+1)}x^{(n+2)}+x^{(n+1)}x^{(n+3)}+\ldots \\ +x^{(2n-1)}x^{(2n)})\big),$$

$$\gamma=P+P'=-\big((x'x''x'''+\ldots+x^{(n-2)}x^{(n-1)}x^{(n)}) \\ +(x^{(n+1)}x^{(n+2)}x^{(n+3)}+\ldots+x^{(2n-2)}x^{(2n-1)}x^{(2n)})\big),$$

ec. ec. ec.,

$$\mu=M-M'=-\big((x'+x''+x'''+\ldots+x^{(n)}) \\ -(x^{(n+1)}+x^{(n+2)}+x^{(n+3)}+\ldots+x^{(2n)})\big),$$

 $\nu=$

$$\nu = N - N' = \left((x'x'' + x'x''' + x''x''' + \ldots + x^{(n-1)}x^{(n)}) - (x^{(n+1)}x^{(n+2)} + x^{(n+1)}x^{(n+3)} + \ldots + x^{(2n-1)}x^{(2n)}) \right),$$

$$\pi = P - P' = -\left((x'x''x''' + \ldots + x^{(n-2)}x^{(n-1)}x^{(n)}) - (x^{(n+1)}x^{(n+2)}x^{(n+3)} + \ldots + x^{(2n-2)}x^{(2n-1)}x^{(2n)}) \right),$$

ec. ec. ec.

Colloco ora nei fattori (*III*) in luogo dei coefficienti i corrispondenti valori in α, β, γ, ec.; μ, ν, π, ec.; faccio il loro prodotto, e paragono questo col primo membro dell' Equazione supposta; risultatando per tal modo un numero m, ossia $2n$ di Equazioni tra le m indeterminate α, β, γ, ec.; μ, ν, π, ec., elimino da queste le $2n-1$ quantità α, β, γ, ec.; ν, π, ec.; e otterremo così un' Equazione finale con la sola indeterminata μ.

184. Essendo μ uguale ad una funzione della forma $f\left((x', x'', x''', \ldots x^{(n)}) - (x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \ldots x^{(2n)})\right)$, ed essendo $2n$ il grado dell' Equazione data, l' Equazione in μ, che risulta, pei (N.[i] 169, 170, 176) sarà del grado $\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n} = 2\omega$, e non conterrà, che le potenze pari della μ, onde supposto $\mu^2 = u$, essa diverrà della forma

(*I*) $u^{\omega} + Ru^{\omega-1} + Su^{\omega-2} + \text{ec.} + V = 0$ (N.° 176).

Ora avendosi $2n = 2^b$, sostituendo ne viene

$\omega =$

$$\omega = \frac{n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\ldots(n+2)(n+1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots 2 \cdot 1} =$$

$$\frac{2^{b-1}(2^b-1)(2^b-2)(2^b-3)(2^b-4)\ldots(2^{b-1}+2)(2^{b-1}+1)}{2^{b-1}(2^{b-1}-1)(2^{b-1}-2)(2^{b-1}-3)(2^{b-1}-4)\ldots 2 \cdot 1},$$

e però col dividere, come nel (N.° 181), sopra, e sotto per 2, ottiensi

$$\omega = \frac{(2^b-1)(2^{b-1}-1)(2^b-3)(2^{b-2}-1)\ldots(2^{b-2}+1)(2^{b-1}+1)}{(2^{b-1}-1)(2^{b-1}-1)(2^{b-1}-3)(2^{b-3}-1)\ldots 1 \cdot 1}.$$

Dunque essendo per la ragione accennata nel (cit. N.° 181) quest' ultimo risultato un numero dispari, di grado dispari sarà l' ottenuta Equazione (*I*), e questa di più pel (N.° 177) avrà l' ultimo termine V negativo. La μ pertanto pel (N.° 178) avrà sempre per lo meno un valore reale. Cerco ora col mezzo di questo valore reale della μ di determinare il corrispondente valore delle α, β, γ, ec.; ν, π, ec.: le ν, π, ec. sono funzioni simili alla μ (N.° 183), e le α, β, γ, ec. pel (N.° 146) da essa determinansi totalmente, come se le fossero simili. Dunque siccome pel (N.° 179) corrispondentemente ai valori reali della μ esiste sempre per lo meno un valore reale di ciascuna delle ν, π, ec.; tal valore reale esisterà ancora riguardo a ciascuna delle α, β, γ, ec.. Determino pertanto questi valori reali di tutte le α, β, γ, ec.; ν, π, ec.; li sostituisco nella espressione dei coefficienti M, N, P, ec.; M', N', P', ec. (N° 183), ed essi perciò diverranno reali, e diverranno quindi reali anche i due fattori (*III*). C. d. d.

185. Avvertasi, che potrebbe il valore reale della μ essere $=0$, e allora pel (N.° 179) potrebbe non aver più luogo la dimostrazione precedente. In tal caso però, o sono zero anche tutte le altre quantità ν, π, ec., o nò: se nò, supposto che sussista, per esempio, ν, giacchè per essere questa una funzione della forma

$$f\left((x', x'', x''', \ldots x^{(n)}) - (x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, x^{(n+3)}, \ldots x^{(2n)})\right),$$ si fa su di essa il discorso medesimo, che abbiamo fatto intorno alla μ, ne dedurremo le stesse conseguenze, e quindi mediante il valore reale della ν ricaveremo il valore reale delle α, β, γ, ec.; π ec., e dei coefficienti M, N, P, ec.; M', N', P', ec.. Se poi tutte queste quantità μ, ν, π, ec. sono $=0$, in allora è visibile, che risulta $M = M'$, $N = N'$ $P = P'$, ec., e il primo membro dell' Equazione $x^n + Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + Px^{n-3} + \text{ec.} = 0$ elevato al quadrato ci produrrebbe il primo membro della (D). La proposta adunque in questa ipotesi si abbasserà da se medesima ad un grado minore della metà, i cui coefficienti M, N, P, ec. dovranno essere non solo reali, ma anche razionali; poichè altrimenti sarebbe evidentemente impossibile, che la quantità finita $x^n + Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + Px^{n-3} + \text{ec.}$ elevata al quadrato divenisse $x^{2n} + Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} + \text{ec.}$

Ed ecco dimostrato in tutti i casi possibili il teorema del (N.° 180).

186. Il primo membro di un' Equazione Algebraica qualunque è sempre composto di tanti fattori di primo, e secondo grado.

Essendo $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + \text{ec.} = 0$ l' Equazione data, ed $m > 2$, dai (N.[i] 180, 181) sappiamo, che il suo primo membro è composto di due fattori della forma $x^n + M x^{n-1} + N x^{n-2} + P x^{n-3} + \text{ec.}$, $x^{m-n} + M' x^{m-n-1} + N' x^{m-n-2} + P' x^{m-n-3} + \text{ec.}$, i coefficienti dei quali sono reali. Ora se m, ed $m - n$ sono tuttavia > 2, dimostrasi nel modo istesso essere questi fattori composti di altri parimenti reali di grado inferiore, e così si prosiegue a dimostrare, finchè i successivi esponenti divengono non > 2. Dunque se supponghiamo di giungere a questi ultimi fattori di grado non > 2, essendo essi pure reali, ne viene, che ec.

Simili fattori saranno dunque della forma $x^2 + a x + b$, $x + c$, ove a, b, c saranno quanti reali, ed uguagliati allo zero non saranno, che tante Equazioni, le radici delle quali saranno le x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$.

187. Le radici immaginarie in una data Equazione Algebraica vanno sempre accoppiate a due a due, e sono sempre della forma $d \pm e\sqrt{-1}$, in cui d, ed e sono quantità reali.

Se nella data Equazione $x^m + A x^{m-1} + \text{ec.} = 0$ esistono delle radici immaginarie, queste negli ultimi fattori reali pel (N.° prec.) non potranno evidentemente contenersi, che a due a due in quelli del secondo grado $x^2 + a x + b$; ma le radici del-

delle Equazioni $x^2 + ax + b = 0$ sono sempre della forma $-\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} - b)} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(b - \frac{a^2}{4})}\sqrt{-1} = d \pm e\sqrt{-1}$, fatto $-\frac{a}{2} = d$, $\sqrt{(b - \frac{a^2}{4})} = e$. Dunque essendo $d =$ quantità reale, e nel caso delle radici immaginarie essendo $b > \frac{a^2}{4}$, onde anche $e = \sqrt{(b - \frac{a^2}{4})} =$ quantità reale, ne viene, che ec.

188. Qualunque quantità immaginaria è sempre riducibile alla forma del (N.° prec.) $d \pm e\sqrt{1}$.

Proposta una quantità immaginaria Π involvente degl' immaginarii di un grado qualunque, e in una qualunque maniera, facciasi $x = \Pi$; in seguito pel (N.° 121) tolgansi dall' Equazione $x = \Pi$ tutti i radicali, che ivi esistono, e riducasi essa in tal modo ad un' Equazione $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ ec. $= 0$ priva affatto di radicali: ora qualunque radice immaginaria di questa Equazione è sempre riducibile alla forma $d \pm e\sqrt{-1}$ (N.° prec.). Dunque anche Π essendo radice immaginaria dell' Equazione medesima, poichè $\Pi = x$, sarà riducibile alla forma $d \pm e\sqrt{-1}$. Dunque ec.

189. Il numero delle radici immaginarie in una data Equazione qualunque non può mai superare il doppio del numero delle permanenze dei segni (N.° 68) nella Equazione delle differenze (N.° 86).

Le

Le radici immaginarie esistendo in qualunque Equazione a due a due della forma $d+e\sqrt{-1}$, $d-e\sqrt{-1}$, essendo d, e quantità reali (N.° 187), ne viene, che la differenza fra due radici immaginarie corrispondenti sarà $2e\sqrt{-1}$, e il suo quadrato $-4e^2$ quantità reale, e negativa. Ora tale quadrato non è, che una delle radici dell' Equazione delle differenze (N.° 86), e di simili radici esister ne devono in questa Equazione tante, quante sono le coppie delle radici immaginarie nella data. Dunque pel (N.° 73) non potendo qualsivoglia Equazione avere più radici reali negative di quel, che siano in essa le permanenze dei segni, ne segue, che neppure il numero delle coppie delle radici immaginarie nella data potrà essere maggiore di quello delle permanenze dei segni nella Equazione delle differenze; e però ec.

190. Se dunque l' Equazione delle differenze non à permanenza veruna fra i segni, la data non avrà alcuna radice immaginaria. Ricaviamo da ciò un criterio assai facile, onde scoprire, se una data Equazione à delle radici immaginarie, o nò. Ritrovo perciò pel (N.° 86) l' Equazione delle differenze, osservo in questa se abbianvi delle permanenze, o nò; se nò, diremo che le radici della data sono tutte reali; se sì, che ve ne ànno delle immaginarie, e che il numero di queste non può superare il doppio delle permanenze osservate.

191. Supposto che p ci esprima il numero del-

delle radici reali, $2q$ quello delle immaginarie nella Equazione data, onde si abbia $m = p + 2q$, l' Equazione delle differenze conterrà $\frac{p(p-1)}{2}$ radici reali positive, q radici reali negative, e $2q(p+q-1)$ radici immaginarie.

Essendo x', x'', x''', x^{v}, ec. le radici reali, $d'+e'\sqrt{-1}$, $d'-e'\sqrt{-1}$, $d''+e''\sqrt{-1}$, $d''-e''\sqrt{-1}$, $d'''+e'''\sqrt{-1}$, $d'''-e'''\sqrt{-1}$, ec. le immaginarie della data; le radici della Equazione delle differenze saranno le seguenti: $(x'-x'')^2$, $(x'-x''')^2$, $(x'-x^{\text{v}})^2$, ec., $(x''-x''')^2$, $(x''-x^{\text{v}})^2$, ec., $(x'''-x^{\text{v}})^2$, ec., $-4e'^2$, $-4e''^2$, $-4e'''^2$, ec., $(x'-d'-e'\sqrt{-1})^2$, $(x'-d'+e'\sqrt{-1})^2$, $(x'-d'-e''\sqrt{-1})^2$, $(x'-d'+e''\sqrt{-1})^2$, ec.. Ora tra queste radici le prime nate dalla combinazione fra loro a due a due di tutte le radici p reali della data sono di numero $\frac{p(p-1)}{2}$, e sono tutte positive; le radici seconde nate dalla combinazione fra loro delle radici immaginarie corrispondenti sono di numero q, e tutte reali, e negative (N.° 189); e le radici terze prodotte dalla combinazione delle radici immaginarie con le reali, e delle immaginarie non corrispondenti fra loro, è chiaro, che sono tutte immaginarie, e sono di numero $\frac{m(m-1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} - q = \frac{(p+2q)(p+2q-1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} - q$

=

$$= \frac{p(p-1)+2q(2p+2q-1)-p(p-1)-2q}{2}$$

$$= \frac{2q(2p+2q-2)}{2} = 2q(p+q-1).$$ Dunque ec.

192. Ritenute le denominazioni precedenti, e chiamato n il grado dell' Equazione delle differenze, l' ultimo termine di questa Equazione, che chiamerò Z, sarà positivo, se i numeri n, q sono amendue pari, o amendue dispari; e sarà negativo, se l' uno di questi è pari, e dispari l' altro.

Eseguiscasi la moltiplicazione delle $n = \frac{p(p-1)}{2} + q + 2q(p+q-1)$ radici della Equazion ritrovata (N.° prec.). Il prodotto delle $\frac{p(p-1)}{2}$ radici positive è positivo, tale è pure pel (N.° 55) il prodotto delle $2q(p+q-1)$ radici immaginarie, e il prodotto delle q radici negative è positivo, se q è pari, negativo, se q è dispari. Dunque anche il prodotto totale di tutte le n radici diverrà positivo, se sia q pari; e se q sia dispari, diverrà negativo. Ora l' ultimo termine Z uguaglia questo prodotto totale preso col suo segno, se n è pari, e preso col segno contrario, se n è dispari (N.° 24). Combinando adunque l' essere di pari, o dispari in amendue i numeri n, q, vedesi chiaramente, che ec.

193. Il termine Z sarà positivo, o negativo, secondo che è pari, o dispari il numero delle com-

binazioni a due a due fra le p radici della data.

Poichè $n - q$ è un numero sempre pari, ogniqualvolta n, e q siano entrambi pari, od entrambi dispari, e poichè lo stesso $n - q$ è un numero sempre dispari, mentre sia dispari l' uno dei due n, q, e l' altro pari; pel (N.° prec.) ne segue, che l' ultimo termine nella Equazione delle differenze sarà sempre positivo, se $n - q$ sia pari, e se $n - q$ sia dispari, sarà negativo. Ora avendosi $n = \frac{p(p-1)}{2} + q + 2q(p+q-1)$ (N.° prec.), e però $n - q = \frac{p(p-1)}{2} + 2q(p+q-1)$, ed essendo $2q(p+q-1)$ un numero sempre pari, vedesi, che secondo che è pari, o dispari il numero $n - q$, dovrà essere pari, o dispari ancora l' altro $\frac{p(p-1)}{2}$. Quest' ultimo numero adunque $\frac{p(p-1)}{2}$ esprimendoci il numero delle combinazioni a due a due fra le p radici reali della data, ne viene, che ec.

194. Posto il termine Z positivo, se m sia pari, il numero delle radici reali nella Equazione data sarà multiplo di 4; e sarà lo stesso numero multiplo di $4+1$, se m sia numero dispari.

Nella ipotesi di Z positivo dovendo pel (N.° prec.) $\frac{p(p-1)}{2}$ esser numero pari, vedesi, che, espresso con la lettera λ un numero intero posititivo qualunque, dovrà essere, o $\frac{p}{2} = 2\lambda$, e però $p = 4\lambda$, oppure $\frac{p-1}{2} = 2\lambda$, e quindi $p = 4\lambda + 1$. Ora p ci esprime il numero delle radici reali nella data, ed essendo $m = p + 2q$ (N.° 191), se m è pari, tale è anche p; se m è dispari, anche p è dispari. Dunque nel caso di m pari non potendo che risultare $p = 4\lambda$, e mentre m sia dispari, dovendone venire $p = 4\lambda + 1$, deducesi, che ec.

195. Posto Z negativo, le radici reali della data sono un numero multiplo di 4 con di più 2, se m è pari; e se m è dispari, sono di un numero multiplo di 4 con di più 3.

Mentre Z sia negativo, dal (N.° 58) sappiamo dover essere $\frac{p(p-1)}{2}$ un numero dispari. Ora ciò non può succedere, quando non sia $\frac{p}{2} = 2\lambda + 1$, oppure $\frac{p-1}{2} = 2\lambda + 1$, e per conseguenza $p = 4\lambda + 2$, ovvero $p = 4\lambda + 3$. Se dunque proseguirò lo stesso raziocinio del (N.° prec.), troverò in egual modo la verità del Teorema proposto.

196. Dunque se l' ultimo termine nella Equazione delle differenze è positivo, il numero delle radici reali nella Equazione data non potrà che essere uno di questi, 0, 4, 8, 12, ec., mentre il grado di essa data sia pari; e se tal grado sia dispari, non potrà che essere uno dei seguenti 1, 5, 9, 13, ec.. Nel caso poi, che l' ultimo ter-

mine nell' Equazione delle differenze si trovi negativo; se il grado della data sia pari, le sue radici reali saranno 2, oppure 6, oppur 10, 14, ec.; saranno esse 3, ovvero 7, ovvero 11, 15, ec., se il grado della data sia dispari. Potremo con questo criterio determinare il numero preciso delle radici reali, e delle immaginarie nelle Equazioni, che non sorpassano il quinto grado, e in quelle tutte, nelle quali d' altronde si sappia, che le radici immaginarie non ponno essere più di quattro. Noi ci contenteremo di vedere, come ciò eseguiscasi nelle Equazioni di quarto grado.

197. Sia $x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$ l' Equazione data, che per maggiore semplicità pongo priva del secondo termine: la sua Equazione delle differenze sarà pel (N.° 86)

$$y^6 + Qy^5 + Ry^4 + Sy^3 + Ty^2 + Vy + Z = 0,$$

avendosi

$$4Q = 8B,\ 4^2 R = 22B^2 + 8D,\ 4^3 S = 18B^3 - 16BD - 26C^2,$$

$$4^4 T = 17B^4 + 24B^2 D - 7 \cdot 26 D^2 + 3 \cdot 16 BC^2,$$

$$4^5 V = 4B^5 + 2 \cdot 27 C^2 B^2 + 8 \cdot 27 C^2 D - 3 \cdot 4^2 BD^2 + 2 \cdot 4^2 B^3 D,$$

$$4^6 Z = 4^4 D^3 - 2^3 \cdot 4^2 B^2 D^2 + 4^2 \cdot 3^2 BC^2 D + 4^2 B^4 D - 4C^2 B^3 - 3^3 C^4.$$

Ora se quest' ultima quantità è negativa, divenendo negativa la Z, vedesi, che la nostra Equazione in x avrà necessariamente due radici reali, e due immaginarie (N.° prec., 195). Ma se tale quantità, e quindi la Z è positiva, in allora se i coefi coefficienti tutti Q, R, S, T, V, Z sono alternativamente negativi, e positivi, le radici della data saranno tutte reali (N.° 194); e se tale alternazion non succede, esse radici saranno tutte immaginarie (N.° prec.)

Supposta la quantità Z positiva troveremo, che i termini tutti della data si alternano di segno, se sia $B < o$, $B^2 - 4D > o$; e che al contrario questa alternazione non accade, se abbiasi $B > o$, oppure $B^2 - 4D < o$. Dunque trovata la Z positiva, diremo, che tutte le radici della data sono reali, se abbiasi $B < o$, $B^2 - 4D > o$, e che tutte sono immaginarie, se qualcuna di queste ultime condizioni non si verifica, e che finalmente due di queste radici sono reali, e due immaginarie, se il valor della Z risulta negativo.

CAPO DECIMO.

Proprietà delle Radici della Unità.

198. Abbiasi l'Equazione $x^m = 1$, ossia $x^m - 1 = o$: le radici di questa quelle sono, che chiamo *Radici della Unità*. Una di tali radici è chiaro essere l'unità medesima, ma oltre di essa ne dovranno esistere altre $m - 1$; sia α una di queste ultime radici, sostituendo avremo $\alpha^m = 1$, e conseguentemente $\alpha^{2m} = 1$, $\alpha^{3m} = 1$, ec., $\alpha^{nm} = 1$.

Dun-

Dunque non solamente α, ma ancora le sue potenze α^2, α^3, ec., α^n facendo verificar l' Equazione $x^m = 1$, saranno tante radici di essa uguali però, o disuguali fra loro. Supponghiamo presentemente $n = m$, le m successive quantità α, α^2, α^3, ec., α^m, se fossero tutte disuguali fra loro, altro non sarebbero, che tutte le m radici della proposta $x^m - 1 = 0$; ma se ve ne fossero delle uguali, allora non ci darebbero, che un certo numero delle radici medesime una, o più volte ripetute.

199. Supposto che α rappresenti una qualunque delle radici della $x^m - 1 = 0$ diversa dall' unità, e supposto che m sia numero primo, le successive potenze α, α^2, α^3, α^4, ec., α^m tutte ci esprimeranno le diverse radici della nostra $x^m - 1 = 0$.

Pel (N.° prec.) avrò dimostrata la verità del Teorema presente, ogni qual volta avrò dimostrato, che le α, α^2, α^3, α^4, ec., α^m sono tutte disuguali fra loro. Supponghiamo, se è possibile, che due di queste potenze, per esempio le due α^p, α^{p+q} siano fra loro uguali, essendo $p < m$, e $p+q$ non $> m$; avremo perciò $\alpha^p = \alpha^{p+q}$, e quindi $\alpha^q = 1$. Ora giacchè $q < m$, ed m è numero primo, sarà $m = \mu q + r$, indicando μ le volte, che q contienesi in m, ed r ciò, che avanza dalla divisione di m per q, onde $r < q$: sostituendo adunque, la $\alpha^m = 1$ si cangerà nell' altra $\alpha^{\mu q + r} = \alpha^r = 1$. Contengasi la r in m le volte ν, ed s ne sia l' avanzo, zo, sarà perciò $\alpha^m = \alpha^{\nu r + s} = \alpha^s = 1$, avendosi $s < r < q$. Stia parimenti s in m le volte π, e sia t il residuo, si avrà $\alpha^m = \alpha^{\pi s + t} = \alpha^t = 1$, Equazione, in cui $t < s < r < q$. Proseguendo nello stesso modo, vedesi, che si avranno successivamente le Equazioni $\alpha^u = 1$, $\alpha^z = 1$, ec., nelle quali gli esponenti u, z, ec. essendo numeri interi, anderanno sempre più calando: dunque giungeremo all' Equazione $\alpha = 1$; ma questa è impossibile, essendosi supposta la α diversa dalla unità. Dunque ec.

Supposta, per esempio, $x^{17} - 1 = 0$ l' Equazione data, ed α una delle sue radici diversa dall' unità, le α, α^2, α^3, ec., α^{17} pel (N.° prec.) esprimeranno tutte le sue radici, perchè tutte disuguali fra loro. Se due quali si vogliono tra esse si volessero uguali, se si volesse per esempio $\alpha^6 = \alpha^{11}$, ne verebbe $\alpha^5 = 1$, e però $\alpha^{17} = \alpha^{3 \cdot 5 + 2} = \alpha^2 = 1$: ora $\alpha^{17} = \alpha^{2 \cdot 8 + 1} = 1$; dunque sarebbe $\alpha = 1$, il che è contro l' ipotesi. Dunque ec.

200. Qualunque potenza intera della α maggiore della *mesima* ne uguaglia sempre un' altra non maggiore della *mesima*, ed è per conseguenza una delle m radici della $x^m - 1 = 0$.

Elevata la α alla potenza $qm + r$ *esima*, essendo q, r numeri interi, e positivi, ed $r < m$, a cagione di $\alpha^m = 1$ avremo $\alpha^{qm+r} = \alpha^r$. Dunque ec.

201. Esprimendo n un numero intero positivo qualunque non multiplo di m, supponghiamo $\alpha = \beta$; ne verrà α uguale ad una delle radici *ne-*

sime

sime della β. Ora pei (N.[i] 199, 200) α^n non è che una radice della $x^m - 1 = 0$; tale dunque è anche β. Per conseguenza se da una qualsivoglia radice β della $x^m - 1 = 0$ estraggasi una qualunque radice *nesima*, purchè sia n non multiplo di m, uno dei valori del radicale $\sqrt[n]{\beta}$ sarà anch' esso radice della $x^m - 1 = 0$.

202. Avendosi $\alpha^m = 1$, sarà $\alpha = \frac{1}{\alpha^{m-1}} = \alpha^{-(m-1)}$,

$$\alpha^2 = \frac{1}{\alpha^{m-2}} = \alpha^{-(m-2)},\ \alpha^3 = \frac{1}{\alpha^{m-3}} = \alpha^{-(m-3)} \text{ ec., e}$$

però anche le potenze negative della α saranno tante radici della data Equazione.

203. Ritenendo le precedenti supposizioni, se venga proposta l' Equazione $x^m - V = 0$, e sia $\sqrt[m]{V}$ una qualunque delle radici *mesime* della V, per esempio nella ipotesi di V razionale, sia la radice reale, che ottienesi con l' attuale estrazione; le quantità $\alpha\sqrt[m]{V}$, $\alpha^2\sqrt[m]{V}$, $\alpha^3\sqrt[m]{V}$, ec., $\alpha^m\sqrt[m]{V}$ altro non saranno, che le m radici della supposta $x^m - V = 0$.

Sostituiscasi nel primo membro $x^m - V$ in luogo di x la quantità $\alpha^n\sqrt[m]{V}$; avremo perciò il risultato $\alpha^{mn}V - V$: ma a cagione di $\alpha^{mn} = 1$ (N.° 198) ne viene $\alpha^{mn}V - V = V - V = 0$. Dunque la quantità $\alpha^n\sqrt[m]{V}$ sarà anch' essa radice della $x^m - V = 0$; e per conseguenza potendo le n significare un numero qualunque (N.[i] 198, 199, 200), se moltiplicheremo la $\sqrt[m]{V}$ per ciascuna delle m potenze α, α^2, α^3, ec. α^m, risultando in

tal

tal modo pel (N.° 199) un numero m di quantità, che soddisfanno all' Equazione supposta, e tutte diverse fra loro, verremo ad ottenere tutte le m radici della $x^m - V = 0$.

Se si rappresenti con la lettera u una qualunque delle m radici α, α^2, α^3, ec., la quantità $u \sqrt[m]{V}$ ci esprimerà in generale una qualunque delle radici della $x^m - V = 0$.

204. Supponghasi ora m numero composto, e sia $m = pq$, essendo p, q numeri primi; la $x^m - 1 = 0$ si cangierà in questo caso nella $x^{pq} - 1 = 0$. Facciamo $x^p = z$, e quindi $x = u \sqrt[p]{z}$ (N.° prec.); avremo, elevando a potenza, $x^{pq} = z^q$, e però $z^q = 1$, ed $x^p = u^p z$, ossia $z = u^p z$, e quindi $u^p = 1$; donde si vede, che la $x^{pq} - 1 = 0$ è risolubile nelle due $z^q - 1 = 0$, $u^p - 1 = 0$.

Sia β una delle radici della $z^q - 1 = 0$, e γ una di quelle della $u^p - 1 = 0$, diverse amendue dalla unità; pel (N.° 199) le successive potenze β, β^2, β^3, ec., β^q rappresenteranno le q radici della $z^q - 1 = 0$, e le γ, γ^2, γ^3, ec., γ^p esprimeranno le p radici della $u^p - 1 = 0$. Dunque avendosi $x = u \sqrt[p]{z}$, dalla risoluzione delle $z^q - 1 = 0$, $u^p - 1 = 0$ otterremo tutti i valori della x, combinando ciascun valore della u, ossia le quantità γ, γ^2, γ^3, ec., γ^p con ciascun valore della $\sqrt[p]{z}$, cioè con le $\sqrt[p]{\beta}$, $\sqrt[p]{\beta^2}$, $\sqrt[p]{\beta^3}$, ec., $\sqrt[p]{\beta^q}$, ossia con le β, β^2, β^3, ec., β^q (N.° 201).

205. Dalle successive potenze di β, e di γ considerate separatamente non potremo avere che

un numero $p+q-1$ di radici differenti della data $x^m - 1 = 0$.

Giacchè uno dei valori della z (N.° prec.) è $\beta^q = 1$, pongo questo valore nella $x = u\sqrt[q]{z}$, e divenendo essa perciò $x = u$, vedesi, che le successive potenze della γ, essendo valori della u (N.° prec.), saranno ancora valori della x, e radici però della $x^m - 1 = 0$: ma tutte le possibili potenze della γ non danno che un numero p di valori diversi (N.i 198, 199, 200), dunque dalle potenze della γ non avremo, che un numero p di radici della $x^m - 1 = 0$. Essendo ora $\gamma^p = 1$ valore della u, pongasi questo nella $x = u\sqrt[q]{z}$, e risultando da ciò $x = \sqrt[q]{z}$, e quindi $x = \beta$, β^2, β^3, ec., β^q (N.i 201, prec.), avremo dalle potenze della β altre q radici della $x^m - 1 = 0$, compresavi l' unità corrispondente alla β^q: ma questa viene anche data dalla podestà *pesima* della γ: sottraendola adunque, le diverse radici della $x^m - 1 = 0$, che ottengonsi dalle varie potenze di β, e di γ, verranno ad essere di numero $p+q-1$. C. d. d.

206. Se si prenda un' altra radice della $x^m - 1 = 0$ diversa, e dalla unità, e dalle potenze di β, e di γ considerate separatamente, e facciansi di questa tutte le m potenze successive, esse altro non saranno, che tutte le m radici della data.

Chiamatasi α simile radice, affine di dimostrare questo Teorema non avrò che a dimostrare, siccome nel (N.° 199), che tutte le potenze α, α^2, α^3, ec., α^m sono fra loro disuguali. Ora per eseguir

guir questo, supponghiamo, che due quali si vogliono fra loro siano, se è possibile, tra loro uguali, che sia per esempio $\alpha^r = \alpha^{r+s}$, avendosi $r < m$, ed $r + s$ non $> m$; sarà quindi $\alpha^s = 1$, e però α sarà la radice della $x^s = 1$: ma la s non può essere uguale nè all' unità, nè alla p, nè alla q, poichè altrimenti si avrebbe α o uguale all' unità, o radice di una delle due $u^p - 1 = 0$, $z^q - 1 = 0$ contro la supposizione: dunque essendo s primo ad m (N.° 204), avremo $m = \mu s + t$, e però $\alpha^{\mu s + t} = \alpha^t = 1$, essendo l' avanzo $t < s$. Proseguendo ora il discorso come al (N.° 199), giungeremmo finalmente ad ottenere $\alpha = 1$ contro la ipotesi. Dunque essendo impossibile, che tra le m precedenti potenze della α due qualunque ve ne siano uguali fra loro, ne segue, che ec.

Sia per esempio $m = 6$, onde abbiasi $p = 3$, $q = 2$; la data $x^6 - 1 = 0$ si risolverà in questo caso nelle due $z^2 - 1 = 0$, $u^3 - 1 = 0$ (N.° 204), e giacchè dalla prima abbiamo $z = \pm 1$, e diviso il primo membro della seconda per $u - 1$ producesi l' Equazione $u^2 + u + 1 = 0$, e quindi si à $u = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, ne viene, che avremo $\beta = -1$, $\beta^2 = 1$, $\gamma = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\gamma^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, $\gamma^3 = 1$, e queste ci daranno un numero $3 + 2 - 1 = 4$ di radici diverse della data (N.° 205). Ora affine di averle tutte, giacchè $x = u \sqrt[q]{z}$ (N.° 204), e nel nostro caso $x = u \sqrt[2]{z}$, pongo in vece della u

la u il suo primo valore γ, e invece della z il valore β, e risultandoci $x = \gamma \sqrt[3]{\beta} = \frac{-1+\sqrt{-1}}{2} \times \sqrt[3]{-1} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \times -1 = \frac{+1-\sqrt{-3}}{2}$, sarà questo pure un valore della x; ma esso è diverso dalle precedenti potenze della β, e della γ: posto dunque $= \alpha$, pel (N.° prec.) le sei successive potenze

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{-3}}{2},\ \alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},\ \alpha^3 = -1,$$

$$\alpha^4 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \alpha^5 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ \alpha^6 = 1$$

altro non saranno, che le sei radici della $x^6 - 1 = 0$.

207. Se m abbia più di due fattori, se sia per esempio $m = a\,b\,c\,d$, e però $x^m = x^{abcd} = 1$; mediante il discorso del (N.° 204) sciolgo prima questa Equazione nelle due $z^a = 1$, $r^{bcd} = 1$; poscia col discorso istesso risolvo la $r^{bcd} = 1$ nelle $u^b = 1$, $s^{cd} = 1$; e finalmente la $s^{cd} = 1$ nelle $y^c = 1$, $t^d = 1$: onde, risolta così la data $x^m = 1$ in tante Equazioni $z^a = 1$, $u^b = 1$, $y^c = 1$, $t^d = 1$, quanti sono i fattori a, b, c, d, avremo come nel (N.° 204) dalla combinazione fra loro delle radici di queste Equazioni tutti gli m valori della x: e di fatti combinando le radici della $t^d = 1$, con quelle della $y^c = 1$, otterremo tutte le $c\,d$ radici della $s^{cd} = 1$; in seguito combinando queste con le radici della $u^b = 1$, ricaveremo le $b\,c\,d$ radici

dici

dici della $r^{bcd} = 1$; e finalmente moltiplicando ciascuna di queste ultime con ciascuna radice della $z^a = 1$, tutte ci risulteranno le $abcd = m$ radici della proposta.

208. Poichè le radici della $z^a - 1 = 0$, $u^b - 1 = 0$, ec. sono finalmente altrettanti valori della x, ne viene, che potrò scrivere la x medesima in luogo delle z, u, ec; e i primi membri delle Equazioni $x^a - 1 = 0$, $x^b - 1 = 0$, ec. saranno tanti fattori della Equazione data $x^m - 1 = 0$.

209. Nelle radici della unità la loro somma, la somma degli ambi, la somma dei terni, ec. uguagliano lo zero, ed il loro prodotto è $= \pm 1$, prendendosi il segno superiore, quando m sia dispari, e l' inferiore, quando m sia pari.

Mancando nella $x^m - 1 = 0$ tutti i termini a riserva del primo, e dell' ultimo; paragonata questa con l' Equazion generale $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} + \ldots + V = 0$, diverrà ciascuno dei coefficienti A, B, C, ec. uguale allo zero, e l' ultimo $V = -1$. Dunque pel (N.° 31) ec.

210. Supposto k un numero qualunque intero, o fratto, positivo, o negativo, purchè non multiplo di m, avremo sempre $\Sigma x^k = 0$; e se vogliasi k multiplo di m, sarà $\Sigma x^k = m$.

1.° Se k è numero intero, positivo, e minore di m, ripongo pel (N.° prec.) lo zero in luogo dei coefficienti tutti A, B, C, ec., P nella (F) (N.° 34); e otterremo $\Sigma x^k = 0$.

2.° Vogliasi $k = mn + b$, essendo $b < m$. A cagione ne di $\alpha^{nm} = \alpha^m = 1$ (N.° 198), avendosi $\alpha^{nm+h} = \alpha^{nm} \times \alpha^h = \alpha^h$, non è difficile a vedersi, che sarà ancora $\Sigma\, x^{nm+h} = \Sigma\, x^h$; ma pel (prec. 1.°) $\Sigma\, x^h = 0$. Dunque sarà ancora $\Sigma\, x^{nm+h} = 0$.

3.° Abbiasi $k = n\,m$; poichè per essere $\alpha^{nm} = \alpha^m$, si à $\Sigma\, x^{nm} = \Sigma\, x^m$; e poichè riponendo lo zero in luogo dei coefficienti A, B, C, ec., e -1 in luogo di V (N.° prec.) nella $\Sigma\, x^m + A\,\Sigma\, x^{m-1} + B\,\Sigma\, x^{m-2} + C\,\Sigma\, x^{m-3} + \text{ec.} + V = 0$ (N.° 36), si ottiene $\Sigma\, x^m - m = 0$, e però $\Sigma\, x^m = m$; sarà ancora $\Sigma\, x^{nm} = m$.

4.° Essendo $\alpha^{pm-l} = \alpha^{pm} \times \alpha^{-l} = \alpha^{-l}$, è chiaro, che quanto dicesi di $\Sigma\, x^{pm-l}$ dicesi ancora di $\Sigma\, x^{-l}$; ma supposto p tale, che $p\,m < l$, pei (prec. N.[i] 1.°, 2.°, 3.°) abbiamo $\Sigma\, x^{pm-l} = m$, se $p\,m - l$, e però l è un numero multiplo di m; e se non lo è, abbiamo $\Sigma\, x^{pm-l} = 0$: dunque sarà eziandio $\Sigma\, x^{-l} = m$ nel primo caso, e $\Sigma\, x^{-l} = 0$ nel secondo.

211. Queste medesime proprietà si applicano ancora all' Equazione $x^m - V = 0$, poichè e l' Equazione istessa, e le sue radici (N.° 203) sono simili affatto, e alla Equazione, e alle radici della unità.

CA-

pag.	linea	Errori	Correzioni della Parte I.
VI	18	o	e
VIII	6	a sposte	à esposte
12	12	$ep - bmn$	$ep - bmp$
13	10, 13	$L\, x^{m-(k+1)}$	$L\, x^{m-(k-1)}$
—	24	supporre tanti	supporre sempre tanti
14	25	$= 30$	$= -30$
19	17	$N'\, x^{m-(k+2)}$	$N'\, x^{m-k}$
—	22, 28	$N'\, x^{m-(k+1)}$	$N'\, x^{m-(k-1)}$
20	7	$N''\, x^{m-(k+2)}$	$N''\, x^{m-k}$
24	5	l' aggregato a' *k* a' *k*	l'aggregato dei prodotti a *k* a *k*
41	24	$\beta^p + \alpha^m \delta^n$	$\beta^p \alpha^m \delta^n$
—	26	$\gamma^p \alpha^n \beta^m \gamma^p + \alpha^m \delta^n$	$\gamma^p \alpha^n \beta^m + \gamma^p \alpha^m \delta^n$
45	8	$\Sigma x^p \Sigma x^m x^p$	$\Sigma x^p \Sigma x^m x^n$
51	4	+ ec.	ec.
56	10	$a\mathrm{T} : a$	$z\mathrm{T} : a$
67	24	$+ 32$	$+ 36$
68	25	della	delle
71	5	la $R = 0$	la $R' = 0$
90	4	$\Sigma^{2k-2} \Sigma x^2$	$\Sigma x^{2k-2} \Sigma x^2$
94	1	essere $\frac{x'}{x''} - x'''$	essere $= \frac{x'}{x''} - x'''$
99	24	$\frac{x' - x'''}{x''}$	$\frac{x'' - x'''}{x'}$
101	26	$(^{IV})$	(x^{IV})
104	14, 24	$(m - (\lambda - 1)$	$(m - (\lambda - 1))$
—	21	$(x^{(a+1)}, x^{(a+2)}), x^{(a+3)}) \ldots x^{(a+b)})$,	$(x^{(a+1)}, x^{(a+2)}, x^{(a+3)}, \ldots x^{(a+b)})$.
—	22	$(x^{(a+b+1)}), x^{(a+b+2)})$	$(x^{(a+b+1)})(x^{(a+b+2)})$
105	6	$(x\, m)$	$(x^{(m)})$
109	27	$-2 \Sigma \overline{x x}^3$	$-2 \Sigma x^1 x^3$
110	2	$\Sigma \overline{x x x}^2$	$6 \Sigma \overline{x x x}^2$
—	4	$P =$ ec.	*il valore del coefficiente* P *và diviso per 2*
—	5, 6	$R =$ ec.	*il valore del Coefficiente* R *deve essere il seguente*

110

pag.	linea	Errori	Correzioni
110	12, 13	$6b^3 + 17c^2$	$3\Sigma x^3 \Sigma x^3 - 2\Sigma x \Sigma x^2 \Sigma x^3 + \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x - 2\Sigma x^6 + 6c^2 4b^3 + 27c^2$
—	15	$b = e - \frac{d}{3}$	$b = e - \frac{d^2}{3}$
—	17, 18	$y^6 +$ ec. $= 0$	*questa Equazione deve scriversi* $y^6 + 4(e - \frac{d^2}{3})y^4 + 9(e - \frac{d^2}{3})^2 y^2 + (4(e - \frac{d^2}{3})^3 + 27(f - \frac{de}{3} + \frac{2d^3}{27})^2) = 0$
113	9	$\left(\frac{c + b(an - bm) + \text{ec.}}{gm - fn}\right)$	$\left(c + \frac{b(an - bm) + \text{ec.}}{gm - fn}\right)$
—	10	$\left(\frac{d + i(an - bm) + \text{ec.}}{gm - fn}\right)$	$\left(d + \frac{i(an - bm) + \text{ec.}}{gm - fn}\right)$
111	12	come	nome
117	14	fg, ec.	$f \cdot g$, ec.
134	29	$\Sigma x' x^2 = \Sigma x' \Sigma x^2$	$\Sigma x x^2 = \Sigma x \Sigma x^2$
136	17	nella	nelle
144	30	— A D	— A B
145	27	y	y'
147	7	T	T'
—	9	$t + t'$	$t - t'$
150	20	$K(n - 1(t^{(n)n-2}$	$K(n - 1)t^{(n)\,n-2}$
—	26	$T''' y''$	$T''' y'''$
151	17	(*VI*)	(*VII*)
152	1, 3, 5,) 15, 17, 19)		*in vece della lettera u va posta la t, in vece della v la u, e in vece della z va posta la φ.*
153	1, 3, 5)		
152	18	$K\,2\,t'^{n-2}$	$H\,2\,t'^{n-2}$
155	14	$-\frac{2AB + A^3}{B}$	$\frac{2AB - A^3}{8}$
159	4	(N.° 105)	(N.° 106)
161	16	mediante t'	mediante t''

pag.	*linea*	*Errori*	*Correzioni*
163	28	(N.° 21)	(N° 22)
166	7	(N.° 144)	(N.° 142)
167	19	della (*I*)	delle (*III*)
171	11	z^{IV}	z^{VI}
178	14	$(n - 2)$	$(2n - 2)$
183	8		*manca in margine il segno (II)*
187	3, 7	(N.° 181)	(N.o 182)
190	9	$e\sqrt{1}$	$e\sqrt{-1}$
194	1	radici della data	radici reali della data
195	10	sono un numero	sono di un numero
196	21	$-7 \cdot 26$	$-7 \cdot 16$
—	23	$-3 \cdot 4^2$	$-3 \cdot 4^3$
197	10	B^3	B^2
199	30	α	α^n
200	25	le n	la n
204	2	$\sqrt{-1}$	$\sqrt{-3}$
—	3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{-3}$
205	5	della	delle
206	9	V	m V

TEORIA GENERALE
DELLE
EQUAZIONI,

IN CUI SI DIMOSTRA IMPOSSIBILE

LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE EQUAZIONI GENERALI DI GRADO SUPERIORE AL QUARTO

DI

PAOLO RUFFINI.

PARTE SECONDA.

BOLOGNA MDCCXCVIIII.

NELLA STAMPERIA DI S. TOMMASO D' AQUINO.

CAPO DECIMOPRIMO.

Soluzioni delle Equazioni Algebraiche determinate di terzo, e quarto grado.

212. Determinar le radici dell' Equazione $x^3 - V = 0$. Supposto $\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ (N.° 206), avendosi $\alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $\alpha^3 = 1$; pel (N.° 203) $\alpha\sqrt[3]{V}$, $\alpha^2\sqrt[3]{V}$, $\sqrt[3]{V}$ saranno le tre radici richieste. Se sia $V = 125$, tali radici saranno $\sqrt[3]{125} = 5$, $\alpha\sqrt[3]{125} = \frac{-5+5\sqrt{-3}}{2}$, $\alpha^2\sqrt[3]{125} = \frac{-5-5\sqrt{-3}}{2}$.

213. Sciogliere l' Equazione

(N) $x^3 + Bx + C = 0$. Suppongo $x = z + u$, sostituisco, e verrà $z^3 + 3uz^2 + 3u^2z + u^3 + Bz + Bu + C = 0$, ossia $z^3 + u^3 + C + (3uz + B)(z+u) = 0$. Giacchè in questa Equazion risultata abbiamo due incognite z, u, l' una di esse potrò determinarla ad arbitrio; cerchiamo dunque di determinare la u per modo, che risulti $3uz + B = 0$, e la precedente Equazione divenga perciò $z^3 + u^3 + C = 0$. Sciolgo a tal fine la Equazione $3uz + B = 0$, e avendosi da essa $u = -\frac{B}{3z}$, sostituisco questo valore nell' altra $z^3 + u^3 + C = 0$, e otterremo così l' Equazione $z^3 - \frac{B^3}{27z^3} + C = 0$, ossia

$z^6 +$

$z^6 + Cz^3 - \frac{B^3}{27} = 0$. Cercando presentemente la soluzione di quest' ultima, suppongo $z^3 = y$; sostituisco, e risultando $y^2 + Cy - \frac{B^3}{27} = 0$, ne verrà $y = -\frac{C}{2} + \sqrt{\left(\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}\right)}$ ovvero $y = p + q$, supposto per semplicità di scrivere $-\frac{C}{2} = p$, $\sqrt{\left(\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}\right)} = q$: ora chiamata α una qualunque delle tre radici cubiche della unità, pel (N.° prec.) dalla $z^3 = y$ abbiamo $z = \alpha\sqrt[3]{y}$. Dunque sostituendo sarà $z = \alpha\sqrt[3]{(p+q)}$. Ripongo questo valore nella $u = -\frac{B}{3z}$, e avremo $u = -\frac{B}{3\alpha\sqrt[3]{(p+q)}}$.

Giacchè $\alpha^3 = 1$, moltiplico il numeratore di questo secondo membro per $\alpha^3\sqrt[3]{(p-q)}$, e il denominatore per $\sqrt[3]{(p-q)}$; avremo quindi

$$u = \frac{-\alpha^3 B\sqrt[3]{(p-q)}}{3\alpha\sqrt[3]{(p+q)} \times \sqrt[3]{(p-q)}} = \frac{-\alpha^2 B\sqrt[3]{(p-q)}}{3\sqrt[3]{(p^2-q^2)}},$$

ed essendo $q^2 = \frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27} = p^2 + \frac{B^3}{27}$, sarà

$$u = \frac{-\alpha^2 B\sqrt[3]{(p-q)}}{3\sqrt[3]{\left(p^2 - p^2 - \frac{B^3}{27}\right)}} = \frac{-\alpha^2 B\sqrt[3]{(p-q)}}{-3\frac{B}{3}} = \alpha^2\sqrt[3]{(p-q)}.$$

Dnnque riponendo in luogo della p, e della q i valori corrispondenti, poichè abbiamo $x = z + u = \alpha\sqrt[3]{(p+q)} + \alpha^2\sqrt[3]{(p-q)}$, ne verrà

$x =$

$$(O)\ x = \alpha \sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2} + \sqrt{\left(\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}\right)}\right)} +$$

$$\alpha^2 \sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2} - \sqrt{\left(\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}\right)}\right)},$$ espressione,

a cui si dà il nome di *Formola Cardanica*, dalla quale, collocando successivamente in vece della α le tre radici cubiche dell' unità, otterremo tre valori della x, cioè le tre radici, che domandavansi, della data.

214. Nello sciogliere nel (N.° prec.) l' Equazione $y^2 + Cy - \frac{B^3}{27} = 0$, abbiam tenuto conto della sola radice $y = -\frac{C}{2} + \sqrt{\left(\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}\right)}$;

se presa avessimo l' altra $y = -\frac{C}{2} - \sqrt{\left(\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}\right)}$, col calcolo istesso del (N.° prec.) giunti saremmo pel valore della x all' espressione

$$\alpha \sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2} - \sqrt{\left(\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}\right)}\right)} +$$

$$\alpha^2 \sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2} + \sqrt{\left(\frac{C^2}{4} + \frac{B^3}{27}\right)}\right)}.$$ Ma per le proprietà delle radici della unità gli stessi tre valori ricavansi sì da questa, che dall' altra espressione (N.° prec.). Dunque pel nostro intento bastava, siccome abbiam fatto, tener conto di un solo dei valori della y, trascurandone l' altro.

215. Risolvere l' Equazion generale di terzo grado $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$.

Suppongo $x = t - \frac{A}{3}$; e ridotta così la data ad un' altra $t^3 + B't + C' = 0$ mancante del secondo termine, sciolgo quest' ultima equazione col metodo del (N.° 213), e ottenuto

$t = \alpha \sqrt[3]{\left(-\frac{C'}{2} + \sqrt{\left(\frac{C'^2}{4} + \frac{B'^3}{27}\right)}\right)} +$

$\alpha^2 \sqrt[3]{\left(-\frac{C'}{2} - \sqrt{\left(\frac{C'^2}{4} + \frac{B'^3}{27}\right)}\right)}$, colloco invece della t' il valore $x + \frac{A}{3}$, e invece delle B', C' i loro valori espressi con i coefficienti A, B, C. Avendosi per tal modo le radici della data, vedesi, che infine la soluzione dell' Equazione generale di terzo grado a quella si riduce della (N).

216. Determinare un criterio, onde conoscere quando le radici di un' Equazione di terzo grado siano reali, e quando immaginarie.

Una di queste radici pel (N.° 54) sarà sempre reale; non vien dunque richiesto che di determinare, quali siano le altre due.

Se l' Equazione data sia la $x^3 - V = 0$ (N.° 212), essendo il valore $\sqrt[3]{V}$ sempre reale, gli altri due $\alpha \sqrt[3]{V}$, $\alpha^2 \sqrt[3]{V}$ saranno sempre evidentemente immaginarj.

Che se l' Equazione proposta sia la (N), chiamate α, β, γ le sue tre radici, supponghiamo rappresentarsi da α la radice necessariamente reale. Avendosi pel (N.° 31) $\alpha + \beta + \gamma = 0$, e però $\alpha = -(\beta + \gamma)$, sostituisco in luogo di α il va-

valore $-(\beta+\gamma)$ nei coefficienti
$B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$, $C = -\alpha\beta\gamma$, ed otterremo
$B = -(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)$, $C = \beta^2\gamma + \beta\gamma^2$. Elevo ora B al cubo, C al quadrato, ne verrà

$$B^3 = -(\beta^6 + 3\beta^5\gamma + 3\beta^4\gamma^2 + 3\beta^4\gamma^2 + 6\beta^3\gamma^3 + 3\beta^2\gamma^4 + \beta^3\gamma^3 + 3\beta^2\gamma^4 + 3\beta\gamma^5 + \gamma^6),$$

$$C^2 = \beta^4\gamma^2 + 2\beta^3\gamma^3 + \beta^2\gamma^4.$$

Moltiplico il primo di questi risultati per 4, il secondo per 27; li sommo, e ricavandosi in tal modo

$$27C^2 + 4B^3 = -(4\beta^6 + 12\beta^5\gamma + 24\beta^4\gamma^2 + 28\beta^3\gamma^3 + 24\beta^2\gamma^4 + 12\beta\gamma^5 + 4\gamma^6 - 27\beta^4\gamma^2 - 54\beta^3\gamma^3 - 27\beta^2\gamma^4),$$

riducendo avremo

$$27C^2 + 4B^3 = -(2\beta^3 + 3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 - 2\gamma^3)^2.$$

Ma col dividere questa quantità posta sotto la parentesi per $\beta-\gamma$ ne viene il quoto

$$2\beta^2 + 5\beta\gamma + 2\gamma^2 = 2(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2) + 3\beta\gamma$$

$= -(2B + \frac{3C}{\alpha})$. Dunque sarà

$27C^2 + 4B^3 = -(\beta-\gamma)^2(2B + \frac{3C}{\alpha})^2$, e quindi

$$(\beta-\gamma)^2 = -\frac{27C^2 + 4B^3}{(2B + \frac{3C}{\alpha})^2}.$$

Considerando ora questa frazione $\frac{27C^2 + 4B^3}{(2B + \frac{3C}{\alpha})^2}$; giacchè il suo denominatore $(2B + \frac{3C}{\alpha})^2$ è sempre

dd 2 po-

positivo a cagione della quantità $2B + \frac{3C}{\alpha}$ sempre reale; sarà essa, o positiva, o negativa, o zero, secondo che tale sarà il numeratore $27C^2 + 4B^3$.

Supponghiamo primieramente $27C^2 + 4B^3 > 0$; avendosi in tal caso $\beta - \gamma = \sqrt{\left(-\frac{27C^2 + 4B^3}{(2B + \frac{3C}{\alpha})^2}\right)}$, ne verrà $\beta - \gamma =$ ad una quantità immaginaria, che chiamerò i; e giacchè poi sommando, e sottraendo le due Equazioni $\beta + \gamma = -\alpha$, $\beta - \gamma = i$, risulta $\beta = \frac{i - \alpha}{2}$, $\gamma = \frac{-i - \alpha}{2}$, ne segue, che in questa ipotesi le radici β, γ sono amendue immaginarie.

Sia in secondo luogo $27C^2 + 4B^3 < 0$; avendo in questa supposizione tale quantità un valor negativo, chiamato esso $-N$, la precedente frazione diverrà $(\beta - \gamma)^2 = \frac{N}{(2B + \frac{3C}{\alpha})^2}$, e avremo da ciò $\beta - \gamma = \sqrt{\left(\frac{N}{(2B + \frac{3C}{\alpha})^2}\right)} =$ ad una quantità reale; chiamata r simile quantità, facciamo la somma, e la sottrazione delle due $\beta + \gamma = -\alpha$, $\beta - \gamma = r$; risultandoci da queste operazioni $\beta = \frac{r - \alpha}{2}$, $\gamma = \frac{-r - \alpha}{2}$, vedesi, che in questo caso le due radici β, γ saranno entrambe reali, e disuguali fra loro.

Ab-

Abbiasi finalmente $27C^2+4B^3=0$, divenendo in tale ipotesi $\beta-\gamma=0$, con la solita somma, e sottrazione di questa con l' altra Equazione $\beta+\gamma=-\alpha$, otterremo $\beta=\frac{-\alpha}{2}$, $\gamma=-\frac{\alpha}{2}$; onde in quest' ultimo caso le due β, γ sono reali, ed uguali fra loro.

Ora divisa la quantità $27C^2+4B^3$ per 4.27, ne viene il risultato $\frac{C}{4}+\frac{B}{27}$, quello cioè, che è contenuto nella (O) sotto il radicale secondo; e mentre sia maggiore, o minore, od uguale allo zero $27C^2+4B^3$, tale diviene pur anche $\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}$. Dunque rimanendo la radice α sempre reale, le altre due β, γ diremo essere sempre immaginarie, se abbiasi $\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}>0$; diremo essere tali radici sempre reali, e fra lor disuguali, se sia $\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}<0$; ed essere queste finalmente uguali tra loro, e reali, se risulti $\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}=0$. Dalla sola ispezione adunque della quantità posta nella (O) sotto il segno radicale secondo avremo la sostituzione del proposto Problema.

Se finalmente venga data l' Equazione generale $x^3+Ax^2+Bx+C=0$; la soluzione di questa dipendendo dalla $t^3+B't+C'=0$ (N.° prec.), Equazione simile alla $x^3+Bx+C=0$, ne viene, ne, che tolta la radice sempre reale (N.° 54), le altre due saranno, o immaginarie, o reali, uguali, o disuguali fra loro, secondo che la quantità $\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}$ diviene maggiore, oppure uguale, o minor dello zero.

217. Da quanto abbiamo detto si vede, che se due radici della data Equazione (N.i 213, 215) sono immaginarie, la Formola Cardanica viene sotto un' aspetto reale; e che essa apparisce sotto un' aspetto immaginario, se tutte e tre le radici sono reali, e disuguali fra loro. In quest' ultimo caso la formola Cardanica è tale, che quantunque le tre radici siano tutte reali, pure non si possono mai ottenere, che involte di quantità immaginarie, e quindi è, che questo ha avuto il nome di *Caso irreducibile*.

218. Sciogliere l' Equazione $x^4-V=0$.

Trasporto la V nel secondo membro, estraggo dalla $x^4=V$ la radice seconda, e avuto il risultato $x^2=\pm\sqrt{V}$, estraggo di nuovo la radice medesima, e ne verrà $x=\pm\sqrt{\pm\sqrt{V}}$; onde $+\sqrt{+\sqrt{V}}$, $-\sqrt{+\sqrt{V}}$, $+\sqrt{-\sqrt{V}}$, $-\sqrt{-\sqrt{V}}$ saranno le quattro radici della data, due delle quali, mentre la V sia positiva, sono reali, e due immaginarie.

Se $V=2401$, le quattro radici della $x^4-2401=0$ sarannno $7, -7, 7\sqrt{-1}, -7\sqrt{-1}$.

219. Risolvere la $x^4 + Bx^2 + D = o$.

Suppongo $x^2 = z$, sostituisco, e avutasi l' Equazione $z^2 + Bz + D = o$, la sciolgo, onde avremo $z = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{(\frac{B^2}{4} - D)}$: ora $x = \pm\sqrt{z}$. Dunque sostituendo otterremo

$$x = \pm\sqrt{(-\frac{B}{2} \pm \sqrt{(\frac{B^2}{4} - D)})}.$$

Se $B = -34$, $D = 225$, e l' Equazione data sia $x^4 - 34x^2 + 225 = o$, otterremo le quattro radici $+5, -5, +3, -3$.

220. L' Equazione a risolversi sia la

(P) $x^4 + Bx^2 + Cx + D = o$.

Ridotta questa alla $x^4 + Bx^2 = -(Cx + D)$, aggiungasi ad amendue i membri la quantità $zx^2 + (\frac{B+z}{2})^2$, essendo z una nuova incognita da determinarsi; ciò fatto, avremo $x^4 + (B + z)x^2 + (\frac{B+z}{2})^2 = zx^2 + (\frac{B+z}{2})^2 - Cx - D$, ossia $(x^2 + \frac{B+z}{2})^2 = z(x^2 - \frac{C}{z}x + \frac{(B+z)^2}{4z} - \frac{D}{z})$.

Ora il primo membro di questa Equazione è un quadrato perfetto; cercando adunque di render tale anche il secondo, procuriamo di determinare la z in maniera, che questo riesca, e possa così da esso estraersi la radice seconda, senza che la x resti involta nel radicale. E' chiaro, che avremo l' intento, rendendo un quadrato perfetto la la quantità $x^2 - \frac{C}{z}x + \frac{(B+z)^2 - 4D}{4z}$; ma questa sarebbe appunto tale, se il quadrato della metà del coefficiente $\frac{C}{z}$ uguagliasse l' ultimo termine $\frac{(B+z)^2 - 4D}{4z}$; supporrò adunque dipendentemente dalla indeterminata z l' Equazione $\frac{C^2}{4z^2} = \frac{(B+z)^2 - 4D}{4z}$, e avrem quindi $z^3 + 2Bz^2 + (B^2 - 4D)z - C^2 = 0$, Equazione del terzo grado, la cui soluzione, pel (N° 215) a noi cognita, ci darà tre valori della z, e uno di questi sostituito nella $x^2 - \frac{C}{z}x + \frac{(B+z)^2 - 4D}{4z}$, la renderà un quadrato perfetto, la renderà cioè $x^2 - \frac{C}{z}x + \frac{C^2}{4z^2} = (x - \frac{C}{2z})^2$. Espresso per z' uno qualunque di questi valori, esso ci darà $(x^2 + \frac{B+z'}{2})^2 = z'(x - \frac{C}{2z'})^2$, ed estraendo la radice quadrata, $x^2 + \frac{B+z'}{2} = \pm(x - \frac{C}{2z'})\sqrt{z'}$, ossia $x^2 \mp x\sqrt{z'} + \frac{B+z'}{2} \pm \frac{C}{2\sqrt{z'}} = 0$, Equazione dalla cui soluzione abbiamo $x = \frac{\pm\sqrt{z'}}{2} \pm \sqrt{(-\frac{2B+z'}{4} \mp \frac{C}{2\sqrt{z'}})}$, espressione generale della x, in cui il segno positivo di $\frac{\sqrt{z'}}{2}$

com-

combinasi col negativo di $\frac{C}{2\sqrt{z'}}$, e viceversa; ed ambedue poscia i segni di queste quantità così combinate corrispondono egualmente sì all' uno, che all' altro dei segni della $\sqrt{\left(-\frac{2B+z'}{4} \mp \frac{C}{2\sqrt{z'}}\right)}$ onde avremo con simili combinazioni i quattro valori della x. Giacchè poi dall' Equazione $z'^3 + 2Bz'^2 + (B^2 - 4D)z' - C^2 = 0$ abbiamo $\frac{C}{2\sqrt{z'}} = \frac{\sqrt{(z'^3 + 2Bz'^2 + (B^2 - 4D)z')}}{2\sqrt{z'}} = \frac{\sqrt{(z'^2 + 2Bz' + B^2 - 4D)}}{2}$; sostituendo nella formola ritrovata in luogo di $\frac{C}{2\sqrt{z'}}$ questa quantità otterremo per le chieste radici l' altra espressione

$$x = \frac{\pm\sqrt{z'}}{2} \pm$$
$$\sqrt{\left(-\frac{2B+z'}{2} \mp \frac{\sqrt{(z'^2 + 2Bz' + B'^2 - 4D)}}{2}\right)}.$$

221. Potrebbe sembrare a taluno, che avendo la z tre valori diversi, a ciascuno di questi corrisponder potessero quattro valori diversi della x, onde la data venisse così ad avere dodici diverse radici contro del (N.° 21): ma questa illusione svanirà ben presto, riflettendo, che chiamati z', z'', z''' i tre valori della z, quei valori della x, che corrispondono a z', quegli stessi sono, che corrispondono a z'', ed a z'''. Imperciocchè non avendo noi fatto altro nella $x^4 + Bx^2$

$= -(Cx + D)$, che aggiungere nell' un membro, e nell' altro la medesima quantità $x^2 + (\frac{B+z}{2})^2$; qualunque sia il valor della z, non turbandosi quindi l' Equazione, non vengono perciò a turbarsi neppure le radici della data; il restante del precedente raziocinio non serve, che per determinare fra gli infiniti valori della z quei, che rendono $x^2 - \frac{C}{z}x + \frac{(B+z)^2 - 4D}{4z}$ un quadrato perfetto, tali ritrovandosi essere i soli tre z', z'', z'''.

222. La soluzione della precedente Equazione di quarto grado dipende dalla soluzione della Equazione in z, che è di terzo grado. Dunque andando quest' ultima pel (N.° 216) soggetta al caso irreducibile, al caso medesimo anderà soggetta anche l' altra di quarto grado.

223. Risolvere l' Equazione generale di quarto grado $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$.

Suppongo $x = t - \frac{A}{4}$, sostituisco, e ridotta così la data ad un' altra della forma $t^4 + B't^2 + C't + D' = 0$ risolvo quest' ultima col metodo del (N.° 220): ciò fatto, pongo di nuovo in luogo della t, e dei coefficienti B', C', D' i corrispondenti valori, e avremo così la soluzion dimandata.

224. Le riflessioni istesse dei (N[i] 221, 222) riguardanti l' Equazione del (N.° 220), è chiaro, che si applicano egualmente anche all' Equazione generale del (N.° prec.).

225. Se l' Equazione proposta supera il quarto grado, non possiamo aver metodo, onde ottenerne la soluzion generale algebraica. Gioverà però il fare le riflessioni seguenti.

CAPO DECIMOSECONDO.

Della Soluzione algebraica ricavata a priori *delle Equazioni determinate di terzo, e quarto grado.*

226. Chiamasi *Algebraica* quella quantità, la quale contenendo un numero finito di termini finiti, dipende pienamente, e solamente da alcune, o da tutte le sei operazioni dell' Algebra, o dell' Aritmetica: tali sono tutte le quantità considerate finora, e tali quelle, che andiamo considerando continuamente in questa Teoria, quelle eccettuate dei (Capi 17, 18). In conseguenza di questa definizione diremo, che una data Equazione resta risoluta per una soluzione Algebraica, o Algebraicamente, ogni qual volta il valore delle sue radici ottienesi espresso da quantità Algebraica.

127. Ciò posto, mentre vogliasi sciogliere Algebraicamente un' Equazione determinata di un grado qualunque, è chiaro, che no 'l potremo fare che riducendo essa ad un' altra Equazione di grado inferiore, o dello stesso grado, di cui ci

sia nota la soluzione, e dalle radici della quale possiamo in seguito determinare, o mediatamente, o immediatamente le radici della proposta: ma le radici della Trasformata sono funzioni delle radici della data (N.° 88); dunque per la soluzione Algebraica delle Equazioni altro non facciamo, che determinare delle funzioni delle radici della Equazione proposta, tali, che l' Equazione, dalla quale esse dipendono, abbia le proprietà accennate. Molti sono i metodi a questo fine proposti, e tutti si riducono a questo solo principio: si può ciò vedere facilmente nelle precedenti soluzioni delle Equazioni di terzo, e quarto grado (N.i 213, 215, 219, 220). Essendo però quelle state ritrovate con particolari artifizj, e come suol dirsi *a posteriori*, cercheremo nel capo presente di determinare esse medesime *a priori*, e con tutta la generalità; onde venghiamo così a conoscere, cosa c' insegni l' esposto principio nella soluzion generale Algebraica di tutte le Equazioni.

228. Abbiasi l' Equazione di terzo grado
(N) $x^3 + Bx + C = 0$ mancante per maggiore semplicità del secondo termine. Affine di averne la soluzione *a priori*, cercherò primamente di ridurla ad un' altra di grado inferiore. Ma se si consideri la funzione $f(x')(x'')(x''')$ esprimente in generale le radici di qualunque Trasformata della (N) (N.° 88), sappiamo dal (N.° 92), che essa generalmente parlando, mentre sia razionale, è determinabile per un' Equazione del grado $1 \cdot 2 \cdot 3$
$= 6$

$= 6$, di cui le radici sono

(I) $1.^a f(x')(x'')(x''')$, $2.^a f(x''')(x')(x'')$,
$3.^a f(x'')(x''')(x')$, $4.^a f(x')(x''')(x'')$,
$5.^a f(x'')(x')(x''')$, $6.^a f(x''')(x'')(x')$.

Dunque per ottenere la soluzione cercata, ossia un tale abbassamento, supposta per ora la nostra funzione costantemente razionale, converrà, che delle esposte sei radici ve ne siano delle uguali fra loro: ora simile uguaglianza deve succedere indipendentemente dal valore particolare delle x', x'', x''' (N.° 95), giacchè la data non è, che un' Equazione generale, Equazione per conseguenza, la quale prescinde da qualunque valore particolare delle sue radici; dunque questi sei valori dovendo essere uguali tra loro per la forma della funzione (N.° 88), converrà, che siano fra loro uguali a tre a tre per lo meno; onde in allora due soltanto divenendo i valori diversi della funzione, la Trasformata non ascenderà che al secondo grado. Supponghiamo perciò la funzione $1.^a = 2.^a$, cioè supponghiamo, che la funzione $1.^a$ resti la medesima trasportando la radice, che occupa l' ultimo luogo nel primo, e avvanzando le altre due nella posizione, in cui si trovano. Questa proprietà deve pel (N.° 97) competere anche alle altre radici; dunque avremo la $2.^a = 3.^a$, $4.^a = 5.^a$, $5.^a = 6.^a$; ma per la ipotesi si à $1.^a = 2.^a$, e presentemente abbiamo $2.^a = 3.^a$; dunque sarà la funzione $1.^a = 2.^a = 3.^a$, e così la funzione $4.^a = 5.^a = 6.^a$. Una tale supposizione pertanto soddisfarà alla condizione ne cercata, e si otterrà per suo mezzo un' Equazione del grado $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$.

229. Infinite sono le funzioni, che godono di questa proprietà: volendosi però esprimerne in generale la forma, prendiamo un' altra funzione qualunque delle x', x'', x''', che esprimeremo con la caratteristica φ, e le tre $\varphi(x')(x'')(x''')$, $\varphi(x''')(x')(x'')$, $\varphi(x'')(x''')(x')$, che corrispondono alle tre precedenti funzioni 1.^{a}, 2.^{a}, 3.^{a} (N.° prec.), si disegnino con le lettere z', z'', z''', e con le u', u'', u''' si disegnino le altre tre funzioni $\varphi(x')(x''')(x'')$, $\varphi(x'')(x')(x''')$, $\varphi(x''')(x'')(x')$ corrispondenti alla 4.^{a}, 5.^{a}, 6.^{a}. Ciò fatto, io dico che sarà in generale la precedente funzione 1.$^a = F(z', z'', z''')$, e la 4.$^a = F(u', u'', u''')$. Imperciocchè potendosi evidentemente una qualunque funzione delle x', x'', x''' considerare sempre come composta di altre funzioni delle radici medesime; di più essendo la 1.^{a} una funzione non soggetta ad altra condizione, che a quella di restar la medesima pel cangiamento del (N.° prec.), e finalmente per simile cangiamento non facendo le z', z'', z''' che permutarsi fra loro, e così fra loro le u', u'', u'''; quindi ne segue, che qualunque suppongasi la $\varphi(x')(x'')(x''')$, le $F(z', z'', z''')$, $F(u', u'', u''')$ saranno appunto sempre tali, che soddisfaranno in generale alla condizione del (N.° prec.) e però avremo la funzione 1.^{a} = 2.^{a} = 3.$^a = F(z', z'', z''')$,

e la

e la $4.^a = 5.^a = 6.^a = F(u' u'' u''')$. Sia per esempio $z' = \frac{x'^2}{x''}$; avendosi perciò $z'' = \frac{x'''^2}{x'}$, $z''' = \frac{x''^2}{x'''}$;

ed $u' = \frac{x'^2}{x'''}$, $u'' = \frac{x''^2}{x'}$, $u''' = \frac{x'''^2}{x''}$, se per esempio supporremo $F(z' z'' z''') = z' + z'' + z'''$, la funzione $\frac{x'^2}{x''} + \frac{x'''^2}{x''} + \frac{x''^2}{x'''}$ sarà appunto quale è stata richiesta nel (N.° prec.) la $1.^a = f(x')(x'')(x''')$, e non avrà che i due valori diversi

$$\frac{x'^2}{x''} + \frac{x'''^2}{x'} + \frac{x''^2}{x'''},\ \frac{x'^2}{x'''} + \frac{x'''^2}{x'} + \frac{x'''^2}{x''}.$$

230. Giacchè le $F(z', z'', z''')$, $F(u' u'' u''')$, qualunque esse siensi, qualunque forma si dia alla $\phi(x')(x'')(x''')$, e qualunque permutazione si faccia tra le x', x'', x''', non possono mai acquistare che due valori diversi (N.° prec.), chiamiamo la prima di queste funzioni y', la seconda y'', ed

(*II*) $y^2 + Sy + T = 0$ l' Equazione, da cui dipende il loro valore. Determinati mediante il (N.° 105) i coefficienti S, T, sciogliamo la (*II*), ed ottenuti per tal modo i valori delle y', y'' espressi pei coefficienti della data, non resterà pel (N.° 227), che a trovare in conseguenza di questi il valore richiesto delle x', x'', x'''. Ma essendo la x' una funzione della forma $f(x')(x'', x''')$ (N.° 103), la sua determinazione in conseguenza di uno dei due valori y', y'' deve pel (N.° 103) necessariamente dipendere da un' Equazione del terzo grado, ed anzi dalla stessa $x^3 + Bx + C = 0$,

poi-

poichè di tale Equazione non solo deve esser radice la x', ma anche le altre due x'', x''' (N° 93). Dunque non sapendosi questa risolvere, e di più non sapendosi risolvere in generale le Equazioni di terzo grado, se non se mentre sono della forma $Z^3 - M = o$, ne viene, che inutile sarebbe il cercare immediatamente dalle y', y'' il valore delle x', x'', x''', e che in vece converrà cercare dalle stesse y', y'' prima il valore di altre funzioni, le quali divengano radici di Equazioni di terzo grado non aventi, che il primo, e l' ultimo termine, e da queste già conosciute potremo poscia pel (N.° 144) dedurre il valore delle x', x'', x''', senza ricorrere ad altre Equazioni di grado maggiore del primo. Chiamata Z questa nuova funzione, siano Z', Z'', Z''' i suoi tre valori, che corrispondono ad y', e però alle tre permutazioni 1.ª, 2.ª, 3.ª (N.° 229); siano V', V'', V''' i valori corrispondenti alla y'', e però alle altre tre permutazioni 4.ª, 5.ª, 6.ª; e siano finalmente $Z^3 - M = o$, $V^3 - N = o$ le due Equazioni, di cui queste funzioni sono radici. Sciolgo la prima di queste due Equazioni, ed avendosi pel (N.° 212) $Z = \sqrt[3]{M}$, $\alpha \sqrt[3]{M}$, $\alpha^2 \sqrt[3]{M}$, posto $Z' = \sqrt[3]{M}$, sarà $Z'' = \alpha \sqrt[3]{M} = \alpha Z$, $Z''' = \alpha^2 \sqrt[3]{M} = \alpha^2 Z$; e nel modo istesso trovasi $V'' = \alpha V'''$, $V''' = \alpha^2 V'$. Dunque la funzione Z pel nostro intento non potrà già essere qualunque, ma dovrà esser tale, che i suoi valori Z', Z'', Z''' corrispondendo alle 1.ª, 2.ª, 3.ª; e gli altri V', V'', V''' alle 4.ª, 5.ª, 6.ª, si abbiano le quantità Z'', V'', Z''', V''',

ugua-

uguali rispettivamente alle Z' V', moltiplicate le prime due per α, le seconde per α^2.

231. Tutti i metodi adunque di soluzione per le Equazioni di terzo grado dipendenti dall' Ipotesi del (N.° 228) a questo necessariamente riduconsi, di trovare cioè da prima una supposizione, che renda le funzioni del (N.° 228) uguali fra loro a tre a tre, e di determinare in tal modo un' Equazione $y^2 + Sy + T = 0$, di cui siano radici le $y' = F(z', z'', z''')$, $y'' = F(u', u'', u''')$ (N.i 229, 230), essendo la z una funzione qualunque. Determinati poscia con la soluzione della $y^2 + Sy + T = 0$ i valori delle radici y', y'', prendesi un' altra Funzione Z dotata delle proprietà accennate nel (N.° prec.); si determina dal valore y' il coefficiente M, oppure da y'' l' altro N, il che può sempre farsi razionalmente pel (N.° 145); e sciolta in fine una delle due Equazioni $Z^3 - M = 0$, $V^3 - N = 0$, e conosciuto così il valore delle Z', Z'', Z''', o delle V', V'', V''', da cadauna delle prime, o delle seconde di queste quantità deducesi corrispondentemente il valore di ciascuna delle radici x', x'', x''', e questo può sempre effettuarsi mediante la formola (M) (N.° 144). Come un tale andamento abbiasi seguito *a posteriori* nella soluzione del (N.° 213), lo vedremo fra non molto, ma prima cerchiamo di compiere la soluzione medesima, che ci siamo proposta *a priori* (N.° 228), e di fare alcune ulteriori riflessioni.

232. Potendo la funzione z avere una forma, ed un valore qualunque (N.° 229), supponghiamo per maggiore semplicità $z = Z$, onde in vece di attendere a due funzioni diverse, non abbiasi a tener conto, che di una sola; sarà quindi $z^3 = M$, $u^3 = N$, $z'' = \alpha z'$, $z''' = \alpha^2 z'$, $u'' = \alpha u'$, $u''' = \alpha^2 u'$ (N.° 230). Ciò presupposto, diamo alla z, ossia alla Z questa forma $Px' + Qx'' + Rx'''$, che è la più semplice, e supponghiamo le quantità P, Q, R costanti, e da determinarsi per modo, che si vengano a verificare le condizioni precedenti (N.i 228, 230.) Essendo pertanto $z' = Px' + Qx'' + Rx'''$, ne verrà
$z'' = Px''' + Qx' + Rx''$, $z''' = Px'' + Qx''' + Rx'$, e però

$$Px''' + Qx' + Rx'' = \alpha(Px' + Qx'' + Rx'''),$$
$$Px'' + Qx''' + Rx' = \alpha^2(Px' + Qx'' + Rx''').$$

Paragono ora insieme i termini omologhi di queste Equazioni, ed ottenendosi $P = \alpha R$, $Q = \alpha P$, $R = \alpha Q$, $P = \alpha^2 Q$, $Q = \alpha^2 R$, $R = \alpha^2 P$, osservo, che abbiamo con tre indeterminate P, Q, R sei Equazioni. Dunque alcune di esse o sono identiche con le altre, o sono assurde. Se fossero queste assurde, allora la supposta $Px' + Qx'' + Rx'''$ non potrebbe servire all' intento; che se siano identiche, la funzione sarà opportuna. Colloco in luogo delle Q, R i due loro valori αP, $\alpha^2 P$ ottenuti dalle $Q = \alpha P$, $R = \alpha^2 P$; divengono perciò identiche tutte le precedenti Equazioni, e la P resta indeterminata; dunque la $Px' + Qx'' + Rx'''$

R x''' è stata opportunamente supposta, e dato alla P per maggior semplicità il valore 1, avremo $z' = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')$, $z'' = \alpha (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')$ $z''' = \alpha^2 (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')$. Quello, che si è detto delle z', z'', z''', dicendosi egualmente delle u', u'', u''', sarà
$u' = (x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')$, $u'' = \alpha (x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')$, $u''' = \alpha^2 (x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')$. Supponghiamo, che $z' z'' z''$, $u' u'' u'''$ siano le due funzioni
$F(z', z'', z''')$, $F(u', u'', u''')$; ne verrà

$$y' = z' z'' z''' = \alpha^3 (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$$
$$= (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3,$$
$$y'' = u' u'' u''' = \alpha^3 (x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^3$$
$$= (x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^3,$$ e posto per brevità $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = r$, $x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'' = s$, avremo nella (*II*) il coefficiente $S = -(r^3 + s^3)$, e $T = r^3 s^3$.

233. Affine presentemente di determinare questi coefficienti, e però l' Equazione in y, osservo, che abbiamo

$$r^3 = x'^3 + 3 \alpha x'^2 x'' + 3 \alpha^2 x'^2 x''' + 3 \alpha^2 x' x''^2$$
$$+ 6 x' x'' x''' + 3 \alpha x' x'''^2 + x''^3 + 3 \alpha x''^2 x'''$$
$$+ 3 \alpha^2 x'' x'''^2 + x'''^3,$$
$$s^3 = x'^3 + 3 \alpha^2 x'^2 x'' + 3 \alpha x'^2 x''' + 3 \alpha x' x''^2 +$$
$$6 x' x'' x''' + 3 \alpha^2 x' x'''^2 + x''^3 + 3 \alpha^2 x''^2 x'''$$
$$+ 3 \alpha x'' x'''^2 + x'''^3,$$

onde sommando, e ponendo -1 in vece di α, $+ \alpha^2$, giacchè pel (N.° 209) $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, ne viene $r^3 + s^3 = 2\,(x'^3 + x''^3 + x'''^3) + 12\,x'x''x''' - 3\,(x'^2x'' + x'x''^2 + x'^2x''' + x'x'''^2 + x''^2x''' + x''x'''^2) = 2\,\Sigma x^3 + 12\,x'x''x''' - 3\,\Sigma x^2 x$. Dunque a cagione di $A = 0$ (N.° 228) avendosi pei (N.[i] 35, 24, 41) $\Sigma x^3 = -3\,C$, $x'x''x''' = -C$, $\Sigma x^2 x = +3\,C$, sostituendo otterremo $S = -(r^3 + s^3) = +6\,C + 12\,C + 9\,C = +27\,C$; e con simile artifizio ci risulterà $T = r^3 s^3 = -27\,B^3$. Colloco questi valori nella $y^2 + s\,y + T = 0$, e divenendo essa $y^2 + 27\,Cy - 27\,B^3 = 0$, con la soluzione ricaveremo

$y = -\frac{27\,C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{27^2\,C^2 + 4\cdot 27\,B^3}{4}\right)}$, e posto questo valore per maggiore semplicità $= \pi \pm p$, avremo $y' = \pi + p$, $y'' = \pi - p$.

234. Dalla determinazione delle y', y'' converrà passare a quella delle quantità M, N, onde conoscere le due Equazioni $Z^3 - M = 0$, $V^3 - N = 0$, e ciò in generale sempre otterrebbesi pel (N.° 144): nel nostro caso però essendo $z = Z$, $z^3 = M$, $u^3 = N$, $z' = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$, $u' = x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''$, $y' = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$, $y'' = (x' + \alpha x''' + \alpha x'')^3$ (N.° 232), otterremo immediatamente pel (N.° preced.) $M = y' = \pi + p$, $N = y'' = \pi - p$, e però $Z^3 = \pi + p$, $V^3 = \pi - p$, ossia $z^3 = \pi + p$, $u^3 = \pi - p$. Sciolta ora una di queste Equazioni, da ciascuno dei tre valori della z, o della u ricaveremo pel (N.° 231) ciascu-

na

na delle chieste radici x', x'', x'''; esse però più facilmente otterrannosi nella seguente maniera.

Avendosi $(x'+\alpha x''+\alpha^2 x''')^3 = \pi + p$, $(x'+\alpha x'''+\alpha^2 x'')^3 = \pi - p$, ed $x'+x''+x''' = 0$, sommando le tre Equazioni

(III) $x'+\alpha x''+\alpha^2 x''' = \sqrt[3]{(\pi+p)}$, $x'+\alpha^2 x''+\alpha x''' = \sqrt[3]{(\pi-p)}$, $x'+x''+x''' = 0$, pel (N.° 209) otterremo $3x' = \sqrt[3]{(\pi+p)} + \sqrt[3]{(\pi-p)}$, e però $x' = \frac{\sqrt[3]{(\pi+p)} + \sqrt[3]{(\pi-p)}}{3}$. Moltiplico la prima delle (III) per α^2, la seconda per α, le sommo tutte e tre, e diviso il risultato per 3, ne verrà $x'' = \frac{\alpha^2 \sqrt[3]{(\pi+p)} + \alpha \sqrt[3]{(\pi-p)}}{3}$. Moltiplicata finalmente la prima delle (III) per α, la seconda per α^2, e proseguito il calcolo, come di sopra, ricaveremo $x''' = \frac{\alpha \sqrt[3]{(\pi+p)} + \alpha^2 \sqrt[3]{(\pi-p)}}{3}$. Questi saranno i tre valori delle radici cercate, e ponendo, che α significhi una qualunque delle tre radici cubiche dell' unità, vedesi, che avremo pel valor generale della x

$$x = \frac{\alpha \sqrt[3]{(\pi+p)} + \alpha^2 \sqrt[3]{(\pi-p)}}{3}.$$

Collocando in luogo delle π, p i rispettivi valori $-\frac{27\,C}{2}$, $\sqrt{\frac{(27^2 C^2 + 4 \cdot 27 B^3)}{4}}$ (N.° 233), ne viene $\frac{\sqrt[3]{(\pi \pm p)}}{3} = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi \pm p}{27}\right)} = \sqrt[3]{\Big(-\frac{27\,C}{2 \cdot 27} \pm}$

$\sqrt{(}$

$$\sqrt{\left(\frac{27^2 C^2 + 4 \cdot 27 B^3}{4 \cdot 27^2}\right)}\Big) = \sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{4} + \frac{B^3}{27}\right)}\right)}.$$

Dunque sostituendo sarà

$$(O)\ x = \alpha \sqrt[3]{\left(-\frac{C^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{C^2}{4} + \frac{B^2}{27}\right)}\right)} +$$

$\alpha^2 \sqrt[3]{\left(-\frac{C^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{C^2}{4} + \frac{B^2}{27}\right)}\right)}$ formola non punto diversa dall' ottenuta nel (N.° 213) *a posteriori*.

235. Se l' Equazione data (N.° 228) avesse avuto il secondo termine; chiamato A il suo coefficiente, si sarebbe fatto il discorso medesimo, ponendo però $Sx = -A$, $Sx^2 = A^2 - 2B$, $Sx^3 = 3AB - A^3 - 3C$ (N.° 35) e avremmo in egual maniera ottenuti i valori corrispondenti della x.

236. Estraendo la radice cuba dalla $y' = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3$, $y'' = (x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')^3$ (N.° 232), abbiam ricavato $\sqrt[3]{y'} = x' + \alpha x'' + \alpha x'''$, $\sqrt[3]{y''} = x' + \alpha x''' + \alpha^2 x''$: ma tre devono essere i valori di queste radici; tenendo dunque conto di tutti, avremo $\sqrt[3]{y'} = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')$,
$\sqrt[3]{y'} = \alpha(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')$,
$\sqrt[3]{y'} = \alpha^2(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')$,
$\sqrt[3]{y''} = (x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')$,
$\sqrt[3]{y''} = \alpha(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')$,
$\sqrt[3]{y''} = \alpha^2(x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'')$. Tutti questi valori però nulla alterano la soluzione precedente; poichè paragonando insieme i valori, che si corris-

rispondono, conseguiremo gli stessi risultati del (N.° 234).

237. Abbiamo nel (N.° 228) supposte le (I) tali, che risulti la 1.ª = 2.ª, e ne abbiamo così dedotta la soluzione (N); facciamo presentemente allo stesso fine un' altra supposizione diversa; supponghiamo per esempio la 1.ª = 4.ª. Divenendo perciò la 2.ª = 5.ª, la 3.ª = 6.ª, le (I) saranno tra loro uguali a due a due, e saranno per conseguenza determinabili per un' Equazione del terzo grado (N.° 99). Ma, acciocchè la fatta supposizione possa servire alla soluzione della nostra Equazione, pel (N.° 230) è necessario, che conduca ad un' Equazione della forma $y^3 - T = o$, essendo $y' =$ 1.ª, $y'' =$ 2.ª, $y''' =$ 3.ª. Dunque le (I) dovranno esser tali, che abbiasi non solo la 1.ª = 4.ª, la 2.ª = 5.ª, la 3.ª = 6.ª, ma di più pel (N.° 230), che ne venga $y'' = \alpha y'$, $y''' = \alpha^2 y'$. Ora è egli ciò possibile?

Per la ipotesi fatta la 1.ª $= f(x')(x'')(x''')$ pel (N.° 3) divenendo $f(x')(x'', x''')$, vedesi, che avremo $y' = f(x')(x'', x''')$, $y'' = f(x''')(x', x'')$, $y''' = f(x'')(x''', x')$. Ciò posto moltiplico la seconda di queste Equazioni per α^2, e la terza per α, risultando da ciò $\alpha^2 y'' = \alpha^2 f(x''')(x', x'')$, $\alpha y''' = \alpha f(x'')(x''', x')$, le quantità $\alpha^2 y''$, $\alpha y'''$ saranno evidentemente tali, che non cangiano valore per la permutazione in quanto alla prima di x' in x'', e in quanto alla seconda per la permutazione di x' in x'''. Ora avendosi $y'' = \alpha y'$, $y''' = \alpha^2 y'$,

ne

ne viene $y' = \frac{1}{\alpha} y'' = \alpha^2 y''$, $y' = \frac{1}{\alpha^2} y''' = \alpha y'''$ (N.° 201): dunque anche la funzione y' non cangerà valore per questi cambiamenti di x' in x'', e di x' in x'''; ma la y' è già tale, che resta la medesima per la permutazione di x'' in x'''; dunque essa y' non cangerà mai di valore, qualunque cambiamento si faccia fra tutte e tre le x', x'', x''', e dovendo quindi pel (N.° 3) essere $y' = f(x', x'', x''')$, ne verrà $y' = y'' = y'''$, il che è un assurdo (N.i 211, 119). Dunque ec.

238. Da ciò segue che nelle $Z^3 - M = o$, $U^3 - N = o$ (N.° 230) non potrà giammai essere $M = N$, poichè se ciò fosse, le due $Z^3 - M = o$, $V^3 - N = o$ si ridurrebbero alla sola $Z^3 - M = o$, e da ciò seguirebbe l' assurdo del (N.° prec.). Dunque la Z del (N.° 230) deve sempre avere necessariamente sei valori differenti tra loro.

239. Supponghiamo ora le (*I*) tali, che la 1.ª oltre di essere, come nel (N.° 237) uguale alla 4.ª sia anche uguale ad un' altra di esse funzioni per esempio alla 6.ª. Divenendo perciò la 2.ª = 5.ª = 4.ª, la 3.ª = 6.ª = 5.ª, le (*I*) saranno tutte uguali fra loro, e la $f(x')(x'')(x''')$ diventerà della forma $f(x', x'', x''')$. Questa supposizione potrà essa servire allo scioglimento della (N)?

Fatta secondo il solito la nostra $f(x', x'', x''') = y$, la sua determinazione pel (N.° 101) condurrà sempre ad un' Equazione razionale $y - R = o$. Volendo presentemente da questo valore della

$y =$

$y = R$ ricavare il valore delle radici x', x'', x''', per quanto si è detto nel (N.° 230), non potrà ciò eseguirsi immediatamente, ma solo col determinare da prima le radici di un' Equazione $Z^3 - M = 0$. Essendo dunque necessaria la determinazione di questa $Z^3 - M = 0$, converrà dal valore R ricavare quello del coefficiente M: Ora la Z à necessariamente i sei valori Z', Z'', Z''', V', V'', V''', ed il prodotto dei primi tre è $= M$, essendo il secondo uguale ad un altra quantità N (N.^{i} 230, 238). Dunque per la determinazione della M farà duopo cadere in un' Equazione di secondo grado, di cui siano radici le due quantità M, N (N.° 147). Ma nella ipotesi del (N.° 232) abbiamo $M = y'$, $N = y''$, essendo y', y'' radici della (*II*), Equazione derivata dalla supposizione del (N.° 228), cioè dalla supposizione della funzione 1.^{a} = 2.^{a}; Dunque la ipotesi presente ci dà bensì la soluzione della (N), ma ce la dà conducendosi alla supposizione istessa, che abbiamo fatta sin da principio (N.° 228).

240. Potremo pertanto francamente asserire, che potendo le (*I*) essere tra loro uguali o a due a due, o a tre a tre, o a sei a sei, il solo caso, in cui esse si uguagliano a tre a tre, quello si è, che propriamente conduce alla soluzione della data (N).

241. Abbiamo sin' ora supposta la $y = f(x')(x'')(x''')$ funzione razionale (N.° 228); vogliasi presentemente, che sia incommensurabile.

Onde avere la soluzione della data, sappiamo dovere la nostra $f(x')(x'')(x''')$ esser tale, che serva a' due fini: l'uno cioè di condurre ad un' Equazione in y, di cui conoscasi la soluzione indipendentemente dalla data (N.° 227), l' altro di far sì, che dai valori y', y'' possansi dedurre i corrispondenti della x, o della Z (N.° 230). Ora se la $f(x')(x'')(x''')$ è irrazionale, l' Equazione in y divenendo del grado $p\pi$ (N.° 136), il primo di questi fini riesce sempre più difficile ad ottenersi, e pel secondo dall' irrazionabilità della $f(x')(x'')(x''')$ non ricaviamo vantaggio veruno (N.° 258). Dunque la supposizione, che la $f(x')(x'')(x''')$ sia irrazionale, essendo una supposizione al nostro intento per lo meno inutile, potremo pienamente abbandonarla. Lo stesso affatto si dice di qualunque altro grado si sia l' Equazione data a risolversi.

242. Se l' Equazione (N) à due radici immaginarie, le qualità y', y'' saranno necessariamente reali; saranno poi queste immaginarie, mentre le x', x'', x''' siano tutte reali, e disuguali fra loro; che se finalmente due delle x', x'', x''' sono reali, ed uguali fra loro, in allora le y', y'' divengono anch' esse uguali fra loro, e reali.

Potendo la x' rappresentare una qualunque delle tre radici della (N), supponghiamo, che ci esprima la radice reale, che deve sempre necessariamente esistere (N.° 54); le altre due x'', x''' potranno essere reali, od immaginarie, uguali, o disuguali fra loro.

Sia-

Siano esse primieramente reali, ed uguali; avremo da ciò $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'' = x' + x''(\alpha + \alpha^2) = x' - x'' = \sqrt[3]{y'}$ (N.° 208), e avremo egualmente $x' - x'' = \sqrt[3]{y''}$. Dunque in questa ipotesi le $\sqrt[3]{y'}, \sqrt[3]{y''}$, e però le y', y'' saranno reali, ed eguali tra loro.

2.° Abbiansi le x'', x''' reali, e fra lor disuguali; risultando in questo caso

$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = x' + x'' \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + x''' \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = x' - \frac{1}{2}(x'' + x''') + (x'' - x''') \frac{\sqrt{-3}}{2} = \sqrt[3]{y'}$, ed $x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'' = x' - \frac{1}{2}(x''' + x'') + (x''' - x'') \frac{\sqrt{-3}}{2} = \sqrt[3]{y''}$, vedesi, che le $\sqrt[3]{y'}, \sqrt[3]{y''}$, e quindi le y', y'' saranno necessariamente disuguali fra loro, ed immaginarie.

3.° Supponghiamo finalmente le x'', x''' immaginarie; dovendo esse pel (N.° 187) avere necessariamente la forma $d + e\sqrt{-1}$, $d - e\sqrt{-1}$, supponghiamo $x'' = d + e\sqrt{-1}$, $x''' = d - e\sqrt{-1}$; quindi risulterà $x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = x' + \alpha (d + e\sqrt{-1}) + \alpha^2 (d - e\sqrt{-1}) = x' + (\alpha + \alpha^2) d + (\alpha - \alpha^2) e\sqrt{-1} = x' - d - e\sqrt{3} = \sqrt[3]{y'}$, e nel modo istesso $x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'' = x' - d + e\sqrt{3} = \sqrt[3]{y''}$, e per conseguenza avremo in questo caso le quantità $\sqrt[3]{y'}, \sqrt[3]{y''}$, e perciò le y', y'' reali, e disuguali tra loro. Dunque ec.

243. Ciò stesso, che abbiamo dimostrato nel

 (N.°

(N.° prec.) riguàrdo le y', y'' del (N.° 228) si verifica eziandio in generale rapporto alle quantità M, N (N.° 230).

Attribuitasi alla Funzione Z (N.° 230) una forma qualunque, e qualunque perciò divengano le M, N, è chiaro, che dovranno esse risultar sempre due funzioni delle x', x'', x''' simili alle y', y''; dunque volendo determinar quelle per queste dovremo ricorrere alla (M) (N.° 144), e otterremo così due valori della forma $M = \frac{ay'+b}{2y'+p}$, $N = \frac{ay''+b}{2y''+p}$; supponendosi pel (N.° 144) $y^2+py+q=0$ l' Equazione determinata in y, e supponendosi $a = H1$, $b = H1p + H2$. Ora con la divisione ci risulta $M = \frac{a}{2} + \frac{2b-ap}{4y'+2p}$, $N = \frac{a}{2} + \frac{2b-ap}{4y''+2p}$, e frattanto le a, b, p sono tutte quantità reali, e non può giammai essere $2b-ap=0$, poichè allor ne verrebbe $M = \frac{a}{2} = N$ contro del (N.° 238). Dunque, come facilmente conoscesi dalla semplice ispezione dei valori ottenuti, quali sono le quantità y', y'', se reali cioè, o immaginarie, uguali, o disuguali tra loro, tali saranno pur anche fra loro le M, N, e per conseguenza ec.

244. Poichè qualunque artifizio adoperisi per la soluzione della (N), sempre dobbiam cadere a de-

a determinare le x', x'', x''' dipendentemente dalle Z', Z'', Z''', oppur dalla V', V'', V''' (N.[i] 230, 239, 240), e poichè il valore di queste Z', Z'', ec. dipende dal valore delle quantità M, N; quindi ne viene pei (N.[i] 144, 230), che le radici x', x'', x''', se sono reali, e disuguali fra loro, verranno sempre ad essere determinate per quantità immaginarie, e se due fra queste radici sono immaginarie, il loro valore, prescindendo dal valore di α (N.° 212) in esso contenuto, verrà sempre a determinarsi per quantità reali. Da questo si vede, che qualunque metodo si adoperi nella soluzione generale delle Equazioni di terzo grado, non potremo giammai evitare il caso irreducibile (N.° 217).

245. Passiamo ora a vedere giusta il (N.° 227), come la soluzione della (N) data *a posteriori* (N.° 213) segua esattamente l' andamento accennato nei (N.[i] prec.).

Fatta nel (cit. N.° 227) la supposizione $x = z + u$, e ricavate le due $z^3 + u^3 + C = 0$, $3uz + B = 0$, sostituisco nella prima il valore di u ricavato dall' ultima di queste Equazioni. Avendosi perciò $x = z - \frac{B}{3z}$, sarà $z^2 - xz - \frac{B}{3} = 0$, e $z = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{B}{3}\right)}$. Volendo presentemente tener conto di un solo dei valori della z, lascio innanzi del radicale il solo segno $+$, e colloco in vece della x il valore x', e in luogo della B il suo valo-

valore $x'x''+x'x'''+x''x'''$, ossia, a cagione di $x'+x''+x'''=0$, il valore $-(x'^2+x'x''+x''^2)$: operando in tal modo, e riducendo, otterremo $z'=\frac{x'}{2}+\sqrt{(\frac{-x'^2-4x'x''-4x''^2}{12}}=\frac{x'}{2}+$ $(x'+2x'')\sqrt{\frac{-3}{36}}=\frac{3x'}{6}+\frac{x'\sqrt{-3}}{6}+\frac{2x''\sqrt{-3}}{6}=$ $\frac{x'}{3}+\frac{1+\sqrt{-3}}{6}x'+\frac{2x''\sqrt{-3}}{6}$, e giacchè $x'=-x''-x'''$, sostituendo di nuovo, sarà $z=\frac{x'}{3}-\frac{1+\sqrt{-3}}{6}x''-\frac{1-\sqrt{-3}}{6}x'''=\frac{x'}{3}$ $+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\frac{x''}{3}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\frac{x''}{3}=$ $\frac{x'+\alpha x''+\alpha^2x'''}{3}$, supposto $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\alpha$ (N.° 212); elevo questo valore al cubo, e poichè ne viene $z^3=\frac{1}{27}(x'+\alpha x''+\alpha^2x''')^3$, e poichè pel (N.° 232) abbiamo $z^3=y$, ci risulterà finalmente $y=\frac{1}{27}(x'+\alpha x''+\alpha^2x''')^3$. Dunque la y del (N.° 213) altro non è che una funzione delle x', x'', x''', perfettamente uguale a quella del (N.° 230), supponendo $P=\frac{1}{27}$ (N.° 232). Due pertanto essendo i valori della y (N.° 228), i due cioè, che ricavansi dalla $y^2+Cy-\frac{B^3}{27}=0$ (N.° 213), converrebbe ora pel (N.° 230) da essi determinanare le quantità M, N, coefficienti delle $Z^3 - M = 0$, $Y^3 - N = 0$ (N.° 230). Nel (N.° 232), supposto per semplicità $Z_{,} = z$, $V = u$, e fatto $F(z', z'', z''') = z' z'' z'''$, $F(u', u'', u''') = u' u'' u'''$, ne abbiam ricavato $M = y'$, $N = y''$, e però $z^3 = y'$, $u^3 = y''$: dunque avendosi nel (N.° 213) $z^3 = y$, vedesi, che anche questa supposizione equivale precisamente a quella del citato (N.° 232). Finalmente dai tre valori z', z'', z''' secondo il (N.° 230) conviene determinare corrispondentemente i tre x', x'', x'''; e ciò di fatti eseguiscesi nella (O) (N.° 213); poichè, essendo questa nata dal sostituire nella $x = z + u = z - \frac{B}{3z}$ il valore della $z = \alpha \sqrt[3]{y}$, e pei (N.^i 212, 232) avendosi $z'' = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} z'$, $z''' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} z'$; se in essa (O) farò $\alpha = 1$, diverrà $z = z'$, e verrò così ad ottenere la radice x' dipendentemente da z'; se farò $\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, risultandomi $z = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} z' = z''$, verrò a ricavare da questo valore z'' il corrispondente di x'', e supponendo finalmente $\alpha = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, e però $z = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} z' = z'''$, ci risulterà il valore di x''' da z'''. Dunque l' artifizio adoperato nel (N.° 213) riducesi in fondo a quello stesso, che ci siamo proposto, e che abbiamo usato nel (Capo pre-

presente): colà però abbiamo trovato un tale artifizio indirettamente, e come a tentone; ma quì ricercandolo avvedutamente, e direttamente.

246. Venga richiesta *a priori* la soluzione dell' Equazione generale di 4.° grado

(P) $x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$, che pongo, come nel (N.° 220), priva del secondo termine.

La funzione generale derivante dalle sue radici si è la $f(x')(x'')(x''')(x^{\text{v}})$ determinabile per un' Equazione del grado $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Affine adunque di determinare una trasformata, che serva allo scioglimento della (P), converrà pel (N.° 227) tra le infinite forme di questa $f(x')(x'')(x''')(x^{\text{v}})$ quella trovare, nella quale i risultati, che provengono dalle varie permutazioni tra le x', x'', x''', x^{v}, riescono uguali fra loro ad otto ad otto, poichè in allora la trasformata diviene del grado $\frac{24}{8} = 3°$. Ora supponghiamo essa funzione della forma $f((x', x''), (x''', x^{\text{v}}))$, i suoi valori diversi sono appunto di numero $\frac{24}{2 \cdot 2 2} = 3$ (N.° 102); tale forma adunque sarà opportuna all' intento, e le radici della trasformata saranno le

1.° $f((x', x''), (x''', x^{\text{v}}))$, 2.° $f((x', x'''), (x'', x^{\text{v}}))$, 3.° $f((x', x^{\text{v}}), (x''', x''))$. Dovendo presentemente determinare questa funzione (N.° 227), prendo a tal uopo, siccome nel (N.° 229) un' altra funzione delle x', x'', x''', x^{v}, che disegno con

la ca-la caratteristica φ e chiamo z, faccio in essa tutte le permutazioni analoghe alle già fatte nella funzione disegnata con la f, e queste, operando, come nel (cit. N.° 229), ci daranno in generale i valori delle funzioni 1.ª, 2.ª, 3.ª.

Poichè pel (N.° 229) la z può avere una forma qualunque, per maggiore semplicità supponghiamo, che abbia la forma $\varphi(x' x'')(x''' x^{V})$, e sia $\varphi(x', x'')(x''', x^{V}) = z'$, $\varphi(x''', x^{V})(x' x'') = z''$; osservando in questa ipotesi la natura delle nostre funzioni, ed osservando insieme quanto si disse nel (N.° 229), vedesi non difficilmente, che potremo sempre esprimere la nostra funzione 1.ª per $F(z', z'')$. In egual modo posto $\varphi(x', x''')(x'', x^{V}) = u'$, $\varphi(x'', x^{V})(x' x''') = u''$, $\varphi(x', x^{V})(x'', x''') = t'$, $\varphi(x'', x''')(x' x^{V}) = t''$, ne verrà la 2.ª $= F(u', u'')$, e la 3.ª $= F(t', t'')$.

247. Proseguendo l' operazione secondo il (N.° 230), supposto $F(z', z'') = y'$, $F(u', u'') = y''$, $F(t', t'') = y'''$, converrebbe pel (N.° 105)
(IV) determinare l' Equazione $y^3 + Sy^2 + Ty + V = 0$, sciogliere questa, e conosciuto il valore delle sue radici, determinare dipendentemente da una di loro, per esempio, dalla y' il valore di una quantità M coefficiente di un' altra Equazione $Z^4 - M = 0$ (N.° 230): ciò fatto, converrebbe dalla $Z^4 - M = 0$ determinare il valore delle quantità Z', Z'', Z''', Z^{V}, e da queste dedurre finalmente in corrispondenza il valore richiesto delle radici x', x'', x''', x^{V}.

248. Ma per essere 4 l' esponente della (P) potremo in altro modo giungere al nostro fine, spezzando cioè essa (P) in altre due Equazioni di secondo grado. Supponghiamo infatti un' equazione, di cui siano radici le quantità z', z'', e tale sia la

(V) $$z^2 + Mz + N = 0.$$

Avendosi il coefficiente $M = -(z' + z'') = F(z', z'')$, non sarà questo, che un valore della y', e però come la y' dipende da un' equazione di terzo grado (IV), così parimenti da un' equazione di terzo grado dipenderà la determinazione di esso coefficiente M: conosciuto così il valore della M, dipendentemente da questo conoscer potremo il corrispondente della N (N.° 144), e determinata in tal modo l' Equazione (V), dallo scioglimento di essa ricaveremo i valori delle z', z''. Ciò posto supponghiamo $z' = \varphi(x', x'')$ $(x''', x^{\text{IV}}) = \varphi(x', x'') + 0(x'' + x^{\text{IV}}) = \varphi(x', x'')$, ne verrà $z'' = \varphi(x'', x^{\text{IV}})$, e la determinazione di queste z', z'' è chiaro, che dipenderà da un' Equazione simile alla precedente (V). Ora se suppongansi le x', x'' radici di un' Equazione $x^2 + fx + g = 0$, e le x''', x^{IV} radici di un' altra $x^2 + hx + k = 0$; avendosi $f = -(x' + x'') = \varphi(x', x'')$, $h = -(x''' + x^{\text{IV}}) = \varphi(x''', x^{\text{IV}})$, queste quantità sono del genere delle precedenti $z' = \varphi(x', x'')$, $z'' = \varphi(x''', x^{\text{IV}})$, e determinabili per conseguenza per un' equazione di secondo grado (V), i cui coefficienti dipendono da un' Equazione del grado terzo; e inoltre, conosciute te queste f, h, dalla prima di esse può sempre determinarsi la g, dalla seconda la k (N.° 144). Dunque con la sola soluzione di un' Equazione di secondo, di una di terzo, e di altre di primo grado potremo sempre determinare i coefficienti f, h, g, k, e però le Equazioni $x^2 + fx + g = 0$, $x^2 + hx + k = 0$, onde i valori ricaveremo delle x', x'', x''', x^{IV}.

Queste due Equazioni $x^2 + fx + g = 0$, $x^2 + hx + k = 0$ equivalgono alle due $x^2 - x\sqrt{z} + \frac{B+z}{2} + \frac{C}{2\sqrt{z}} = 0$, $x^2 + x\sqrt{z} + \frac{B+z}{2} - \frac{C}{2\sqrt{z}} = 0$ del (N.° 220), essendo $f = -\sqrt{z}$, $h = \sqrt{z}$, $g = \frac{B+z}{2} + \frac{C}{2\sqrt{z}}$, e $k = \frac{B+z}{2} - \frac{C}{2\sqrt{z}}$.

CAPO DECIMOTERZO.

Riflessioni intorno alla Soluzion generale delle Equazioni.

249. Data sia a risolversi l' Equazione generale

(D) $$x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + \text{ec} = 0$$

Dovendosi al nostro intento pel (N.° 227) determinar da principio una Trasformata di grado inferiore al numero m, o ad esso uguale, purchè risolubile indipendentemente dalla data, supponghiaghiamo essere questa la

(*I*) $y^n + S\,y^{n-1} + T\,y^{n-2} +$ ec. $= 0$, avendosi n numero non maggiore di m. Per la determinazione di una simile Trasformata prendo la funzione $f(x')(x'')(x''')\ldots(x^m)$, e giacchè il suo valore, generalmente parlando dipende da un' Equazione del grado $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$, che chiamo π, converrà, che da prima io cerchi quella forma di essa, per cui tutti i suoi π valori riescano tra loro uguali ad $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)(n+1) \ldots m$, ad $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)(n+1) \ldots m$, poichè in allora il grado della Trasformata diviene per l' appunto $= \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)(n)(n+1) \ldots m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)(n+1) \ldots m} = n$ (N.° 100). Supposto di aver ciò fatto, chiamo y', y'', y''', ec., $y^{(n)}$ i risultati diversi della nostra funzione (N.° 105), determino col loro mezzo i coefficienti S, T, ec., ed ho così la Trasformata (*I*), di cui già conosco la soluzione.

Effettuata questa pertanto, e conosciuti i valori delle y', y'', y''', ec., $y^{(n)}$, poichè generalmente parlando, quì pure si replica quanto si disse nel (N.° 230), veggo, che in generale da questi non potrò determinare i valori delle x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$, ma che sarà necessario determinar prima, come nel (cit.° N.° 230), dipendentemente da y' una quantità M coefficiente di un' Equazione corrispondente $Z^m - M = 0$, oppure da y'' una quantità N coefficiente di un' Equazione $V^m - N = 0$ corrispondente ad y'', e così di seguito. Ciò adunque

que eseguisco, e sciolta una di tali Equazioni, per esempio, la $Z^m - M = 0$, dagli m valori, che si ricavano $\sqrt[m]{M}$, $\alpha \sqrt[m]{M}$, $\alpha^2 \sqrt[m]{M}$, ec. (N.° 203), deduco finalmente in corrispondenza i valori delle radici x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$, e avremo così sciolta la data (D).

250. Se m fosse un numero composto, e fosse $m = np$, sembrando allora non aver più luogo l' inconveniente del (N.° 230), dagli n valori della y pare, che potremo cercare immediatamente gli m della x, deducendo da y' i primi corrispondenti valori x', x'', ec., $x^{(p)}$, da y'' i secondi $x^{(p+1)}$, $x^{(p+2)}$, ec., $x^{(2p)}$, e così in progresso.

251. Osservando la soluzione della (P), (N.° 246), ottenuta con lo spezzamento di essa nei due fattori $x^2 + fx + g = 0$, $x^2 + hx + k = 0$ (N.° 248), potremmo noi credere, che esista un' altro metodo, onde sciogliere le Equazioni differente dal primo (N.° 248), quello cioè di spezzare la (D) in due fattori $x^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} +$ ec. $= 0$, $x^{m-p} + gx^{m-p-1} + hx^{m-p-2} +$ ec. $= 0$, la soluzione dei quali, essendo già cognita, ci dia il valor domandato delle x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$; ma da quanto si è detto nel (N.° 227), e da quanto diremo nei seguenti, vedremo, che questo nuovo metodo, allorchè ha luogo, dipende totalmente dal primo.

252. Per la determinazione di un' Equazione $x^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} +$ ec. $= 0$, di cui voglionsi

radi-

radici le p quantità x', x'', x''', ec. $x^{(p)}$ radici della data (D), converrà determinare i coefficienti a, b, ec., ciascuno dei quali sia funzione della forma $f(x', x'', x''', \ldots x^{(p)})$. Ora la determinazione di una tale funzione sappiamo dal (N.° 104), che non può ottenersi, se non dipendentemente da un' Equazione del grado $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p(p-1)(p-2)\ldots 3 . 2 . 1}$. Espresso dunque per brevità con la lettera λ questo numero, il valore del coefficiente a dipenderà da un' Equazione

(II) $a^\lambda + \mathrm{M}a^{\lambda-1} + \mathrm{N}a^{\lambda-2} +$ ec. $= 0$: perchè poi gli altri coefficienti b, c, ec. non sono, che altrettante funzioni somiglianti alla funzione a, saranno tutti pel (N.° 144) determinabili razionalmente dai corrispondenti valori di questa. Dunque la determinazione della $x^p + ax^{p-1} +$ ec. $= 0$, ossia lo spezzamento accennato nel (N.° 251) non può effettuarsi, se non dipendentemente dalla soluzione di un' Equazione $a^\lambda + \mathrm{M}a^{\lambda-1} + \mathrm{N}a^{\lambda-1} +$ ec. $= 0$, la quale dipendendo affatto dalla proposta (D), non ne sarà infine, che una sua trasformata.

253. Se sia $p = m - 1$, ovvero $p = 1$ ne viene $\lambda = \frac{m}{1}$; se facciasi $p = m - 2$, oppure $p = 2$, ne risulta $\lambda = \frac{m(m-1)}{1 . 2}$; se $p = m - 3$, $m - 4$, ec., ovvero $p = 3$, 4, ec., ottienesi corrispondentemente $\lambda = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3}$,

$\lambda =$

$\lambda = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$, ec., ma a cagione di $p < m$, niuno di questi risultati è inferiore ad m. Dunque generalmente parlando, ignota essendoci la soluzione della (D), non sapremo neppur risolvere la (II), e quindi non sapremo neppure spezzare essa (D), come ci siam proposti nel (N.° 251).

254. Ho detto generalmente parlando, poichè esister ponno benissimo dei casi particolari, in cui la (II) possa abbassarsi di grado, e per tal modo risolversi. Nel (N.° 248), ove, a cagione di $m = 4$, $p = 2$, deve essere $\lambda = 2 . 3 = 6$ (N.° 253), abbiamo ritrovato dipendere il coefficiente f, che corrisponde al nostro a (N.° 251), da un' Equazione di secondo grado, cioè dalla $z^2 + Mz + N = 0$, e il coefficiente M abbiam veduto dipendere da un' altra di terzo, equivalendo poi evidentemente amendue queste Equazioni considerate insieme ad una di sesto grado.

255. Qualunque metodo adunque si usi per lo scioglimento della data (D), saremo sempre condotti a quello del (N.° 249). Ma è egli questo sempre possibile? Abbiam veduto che sì, ogniqualvolta non sia $m > 4$; ma se $m > 4$, che cosa allora succeda, ce lo diranno le riflessioni seguenti.

256. Chiamo *Permutazione semplice* quella, in cui le radici, che la compongono, devonsi muovere tutte simultaneamente dal loro luogo. Semplici dunque saranno le permutazioni, per cui non

cam-

cambian valore le funzioni $\frac{x'^2}{x''} + \frac{x'''^2}{x'} + \frac{x''^2}{x'''}$ (N.° 229), $x' x'' x'''^2 + x''' x^{\text{IV}} x'^2$, restando la seconda di queste la medesima al cambiamento simultaneo di x' in x^{IV}, e di x'' in x^{V}, e la prima a quello di x' in x''', di x'' in x', e di x''' in x''; e semplice sarà parimenti la permutazione di $f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})$ in $f(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x')$. Che se la permutazione è tale, che il cambiamento fra alcune delle sue radici può aver luogo, e simultaneamente, e non simultaneamente al cambiamento fra altre delle medesime prese o disgiuntamente, o unitamente alle prime; allora alla permutazione daremo il nome di *composta*. Sarà quindi Composta la permutazione, per cui non cangiano di valore la funzione $\frac{x' + x'' + x'''}{x'' x^{\text{IV}}}$, e l' altra $f(x', x'', x''', x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})$; e tale sarà pur anche la permutazione di $f(x')(x'')(x''')(x^{\text{V}})$ in $f(x'')(x')(x^{\text{V}})(x''')$, mentre il cambiamento di x' in x'' possa aver luogo separatamente dall' altro di x''' in x^{V}.

257. Due generi distingueremo di Permutazioni semplici. Diremo del *secondo genere* quelle, nelle quali, mentre alcune delle radici, che le formano, cambiansi fra di loro, altre si cambiano fra loro disgiuntamente dalle prime: di questo genere è la permutazione, per cui resta la medesima la precedente funzione $x' x'' x'''^2 + x''' x^{\text{V}} x'^2$. Diremo poi Permutazioni del *primo genere* quelle, nelle

nelle quali non possono alcune delle radici cambiarsi fra loro separatameate dalle altre: sarà del *primo genere* la permutazione, per cui rimane la stessa la funzione $\frac{x'^2}{x''} + \frac{x'''^2}{x'} + \frac{x''^2}{x'''}$ (N.° prec.), e tale sarà l' altra di $f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})$ in $f(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x')$.

258. Nelle permutazioni semplici del *secondo genere*, e nelle composte chiameremo *Permutazioni componenti* quelle, le quali eseguisconsi separatamente dalle altre. Considerando nelle due funzioni $\frac{x'x'''^2}{x^{\text{IV}}} + \frac{x^{\text{IV}}x''^2}{x'}$, $\frac{x'^2 + x''^2}{x'''x^{\text{IV}}x^{\text{V}}}$ la permutazione, per cui esse non cambiansi di valore; nella prima le due componenti saranno la mutazione di x' in x^{IV}, e quella di x'' in x''', nella seconda la reciproca fra le tre radici x''', x^{IV}, x^{V}, e l' altra fra le due x', x''. Nelle Permutazioni semplici del *secondo genere* è chiaro, che le componenti non possono, che essere semplici del *primo*.

259. Le Permutazioni composte distinguonsi in tre generi. Il *genere primo* comprende quelle, nelle quali niuna delle radici esistenti in una qualunque delle permutazioni componenti può passare tra le radici, o nel luogo occupato dalle radici di un' altra. Il *secondo* abbraccia quelle, nelle quali le radici di una permutazion componente possono passar tutte ad occupare il luogo già prima occupato dalle radici di un' altra, senza però, che le radici della prima si framischino

 a quel-a quelle della seconda. Il *terzo* finalmente comprende le Permutazioni, in cui le radici di una delle componenti possono passare a mescolarsi tra le radici di un' altra. Se vogliasi la $f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI}) = f(x'')(x''')(x')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI})$ composta, tale permutazione sarà composta del primo genere; poichè è dessa formata dalla semplice di x' in x'', di x'' in x''', di x''' in x', e dall'altra di x^{IV} in x^{VI}, e non entra frattanto nella prima di queste alcuna delle radici, che formano la permutazione seconda. La Funzione del (N.° 246) $((x', x''), (x''', x^{IV}))$ resta la medesima per una permutazione composta del *secondo genere*, poichè avendosi $f((x', x''), (x''', x^{IV})) = f((x''', x^{IV}), (x', x''))$, le radici x', x'' della prima permutazione componente senza mescolarsi colle radici x''', x^{IV} della seconda, passano in essa ad occuparne il loro luogo. Che se si voglia $f(x')(x'', x''')(x^{IV})(x^{V}) = f(x')(x'', x^{IV})(x^{V})(x''')$, queste due funzioni si uguaglieranno fra loro per una Permutazione composta del *terzo genere*; imperciocchè nel secondo risultato in luogo di x''' radice della prima permutazion componente collocandosi la x^{IV} radice della seconda, e in luogo di x^{V} radice spettante a quest' ultima permutazione ponendosi la x''' radice della prima, noi abbiamo mescolate insieme le radici delle due Permutazioni componenti.

260. Nelle permutazioni composte del *secondo genere* le radici, che passar deggiono a vicenda

da

da una delle permutazioni componenti all' altra, devono in ciascuna di queste esser sempre di numero uguale. Imperciocchè se ciò non fosse, come nella permutazione, per cui non cambia di valore la funzione $f((x', x''), (x''', x^{\text{IV}}, x^{\text{V}}))$; dovendo in allora risultare $f((x', x''), (x''', x^{\text{IV}}, x^{\text{V}})) = f((x''', x^{\text{IV}}), (x', x'', x^{\text{V}}))$ (N.° 3), con la x^{V} radice appartenente alla permutazione seconda anderebbonsi a mescolare le x', x'' radici della permutazione prima contro del (N.° prec.).

261. Se la funzione $y = f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}}) \ldots (x^{(m)})$ è tale, che per la sua forma uguaglia il risultato, che deriva da essa per una data permutazione, se sia per esempio,

$$f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}}) \ldots (x^{(m)}) = f(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x') \ldots (x^{(m)});$$

rinnovando successivamente la permutazione medesima su i nuovi risultati, che ne vengono, finchè ritorni il primo, tutti questi saranno uguali fra loro.

A cagione del (N.° 97) ciò si dimostra affatto, come nel (N.° 228). Perciò se questi risultati fra loro uguali son di numero p; tutti i π risultati dalla y (N.° 92) saranno fra loro uguali a p a p, e dovrà per conseguenza essere π esattamente divisibile per p. Chiameremo questo numero p *il grado di uguaglianza* della nostra funzione.

262. Se nella data $y = f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{V}}) \ldots (x^{(m)})$ eseguiscasi una permutazion

semplice qualsivoglia del *primo genere*, ed essa medesima si replichi quanto sì può; tutti i risultati, che quindi si ottengono, tanti dovranno essere di numero, quante sono le radici implicate nella Permutazione.

Supponghiamo, che nella nostra
$y = f(x')(x'')(x''')(x^{\text{iv}})(x^{\text{v}})(x^{\text{vi}}) \ldots (x^{(m)})$
permutinsi le cinque radici x', x'', x''', x^{v}, x^{vi}, e fissiamo l' attenzione sulla prima x'. Tolta essa dal suo posto, venga questo occupato da un' altra delle radici, per esempio, dalla x^{v}; la x' non potrà passare al quinto posto, poichè se ciò fosse, la permutazione di x' in x^{v} sarebbe disgiunta dall' altra fra le x'', x''', x^{vi} contro la supposizione (N.° 257); sia pertanto il quinto posto occupato da un' altra delle tre radici x'', x''', x^{vi}, per esempio, dalla x'''; neppure in luogo di questa x''' potrà collocarsi la x', imperciocchè in tal caso le x', x''', x^{v} si cambierebbero fra loro separatamente dalle x'', x^{vi} contro la Ipotesi. In luogo adunque della x''' entri, per esempio, la x^{vi}; invece della x^{vi} dovrà per la stessa ragione entrare non già la x', ma la x'', e la x' occuperà finalmente il posto di quest' ultima radice x'': ciò fatto, ne verrà il risultato
2.° $f(x^{\text{v}})(x')(x^{\text{vi}})(x^{\text{iv}})(x''')(x'') \ldots (x^{(m)})$.

Considerando la natura della nostra permutazione, dal primo, e secondo risultato vedesi nascere questo da quello col trasportarsi nel primo posto la radice, che occupava il quinto, col porre

nel

nel quinto la radice, che occupava il terzo, con lo scrivere nel terzo la radice del sesto, mettendo nel sesto la radice del secondo, e nel secondo finalmente la radice del primo. Ora replicando, siccome in (*III*) questa medesima Operazione sul risultato secondo, poscia sul terzo, e così di seguito, io dico, che dopo del quinto la x' tornerà immediatamente al suo primo posto: e di fatti per la natura della permutazione essa vi tornerà subito dopo, che à occupato il posto quinto: ma a questo quinto posto non vi può passare, se non dal terzo, e al terzo non può andare, se non dal sesto, ed al sesto, se non dal secondo. Dunque essa x' tornando al suo primo luogo solamente dopo avere percorsi gli altri tutti, vedesi chiaramente, che vi tornerà solo alla quinta permutazione, ossia dopo il quinto risultato. Ma fissando l' attenzione sulle altre radici x'', x''', x^{v}, x^{vi} trovasi in egual modo che la x'' torna essa pure al secondo luogo nel tempo stesso, che la x' torna nel primo, e così la x''' nel terzo, la x^{v} nel quinto, e la x^{vi} nel sesto. Dunque alla quinta permutazione tornandosi ad ottenere il risultato primo, ne viene, che i successivi risultati richiesti dovranno essere in punto cinque, ossia tanti, quante sono le radici impiegate nella permutazione: ciò vedesi in (*III*). Ora questo discorso medesimo ha luogo egualmente, qualunque siasi la semplice permutazione supposta, e qualunque il numero delle radici impiegatevi. Dunque si verificherà

cherà sempre, che ec.

(III) 1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI}) \ldots\ldots (x^{(m)})$

2.° $f(x^{V})(x')(x^{VI})(x^{IV})(x''')(x'') \ldots\ldots (x^{(m)})$

3.° $f(x''')(x^{V})(x'')(x^{IV})(x^{VI})(x') \ldots\ldots (x^{(m)})$

4.° $f x^{VI})(x''')(x')(x^{IV})(x'')(x^{V}) \ldots\ldots (x^{(m)})$

5.° $f(x'')(x^{VI})(x^{V})(x^{IV})(x')(x''') \ldots\ldots (x^{(m)})$

263. Da questo teorema ricavasi: 1.° che una delle radici implicate nella permutazione precedente occupando un dato luogo in uno dei risultati (*III*), non potrà giammai occupare il luogo istesso in un'altro qualunque dei medesimi. La radice per esempio x^{V} trovasi nel quinto luogo del risultato primo; ma in nessuno degli altri risultati può il quinto luogo venire occupato dalla stessa x^{V}.

2.° Se vogliamo, che la nostra y (N.° prec.) si conservi dello stesso valore per una permutazione semplice qualsivoglia del *primo genere* tutti gli $1.2.3\ldots.m = \pi$ valori di essa saranno uguali fra loro a tanti a tanti, quante sono le radici, che impiegansi nella permutazione supposta; così che se queste radici son di numero p, il numero dei valori differenti della y sarà $\frac{1.2.3\ldots m}{p} = \frac{\pi}{p}$. Se sia $m=5$, $p=3$, e la $f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$

$$=f(x')(x'')(x^{V})(x''')(x^{IV}),$$

i primi risultati tra loro uguali saranno i tre

$$f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V}),$$

$$f(x')(x'')(x^{V})(x''')(x^{IV}),$$

$f(x'$

$$f(x')(x'')(x^{'\mathrm{V}})(x^{\mathrm{V}})(x'''),$$

e i valori differenti della y sarano in numero di $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{3}=\frac{120}{3}=40.$

3.° I π valori della y per una permutazione semplice del *primo genere* non potranno al più, che essere uguali fra loro ad m ad m, e ciò quando nella permutazione tutte si muovono dal loro luogo la m radici. Nel caso di $m=5$, il maggior numero di risultati uguali fra loro ad una permutazione semplice non potrà essere, che di cinque, e ciò mentre si cangino fra loro tutte le

(IV) 1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{'\mathrm{V}})(x^{\mathrm{V}})$
2.° $f(x'')(x''')(x^{'\mathrm{V}})(x^{\mathrm{V}})(x')$
3.° $f(x''')(x^{'\mathrm{V}})(x^{\mathrm{V}})(x')(x'')$
4.° $f(x^{'\mathrm{V}})(x^{\mathrm{V}})(x')(x'')(x''')$
5.° $f(x^{\mathrm{V}})(x')(x'')(x''')(x^{'\mathrm{V}})$

4.° Se una permutazione ci dà i π valori della y tra loro uguali a p a p, essendo $p>m$, tale permutazione non potrà essere, che composta, o semplice del *secondo genere*.

264. Determinare il grado p di uguaglianza nella y, mentre essa conservisi la medesima per una permutazione semplice del *secondo genere*.

Supponghiamo primieramente, che come nella ipotesi di

$$f(x')(x'')(x''')(x^{'\mathrm{V}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{V}'})(x^{\mathrm{V}''})(x^{\mathrm{V}'''})(x^{'\mathrm{X}})(x^{\mathrm{X}})=$$
$$f(x^{'\mathrm{V}})(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{V}'})(x^{\mathrm{V}''})(x^{\mathrm{V}'''})(x^{'\mathrm{X}})(x^{\mathrm{X}})(x^{\mathrm{V}}),$$

la

la nostra permutazione sia formata di due so-
le componenti (N.° 258), la prima di quattro, e la seconda di sei radici. Replicando su 'l risultato secondo, poscia su 'l terzo, e così di seguito, l' operazione medesima, ne verranno i risultati

1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})$
$(x^{IX})(x^{X})$

2.° $f(x^{IV})(x')(x'')(x''')(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})$
$(x^{X})(x^{V})$

3.° $f(x''')(x^{IV})(x')(x'')(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X})$
$(x^{V})(x^{VI})$

4.° $f(x'')(x''')(x^{IV})(x')(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X})(x^{V})$
$(x^{VI})(x^{VII})$

5.° $f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{IX})(x^{X})(x^{V})(x^{VI})$
$(x^{VII})(x^{VIII})$

6.° $f(x^{IV})(x')(x'')(x''')(x^{X})(x^{V})(x^{VI})(x^{VII})$
$(x^{VIII})(x^{IX})$

(V) 7.° $f(x''')(x^{IV})(x')(x'')(x^{V})(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})$
$(x^{IX})(x^{X})$

8.° $f(x'')(x''')(x^{IV})(x')(x^{VI})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})$
$(x^{X})(x^{V})$

9.° $f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{VII})(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X})$
$(x^{V})(x^{VI})$

10.° $f(x^{IV})(x')(x'')(x''')(x^{VIII})(x^{IX})(x^{X})(x^{V})$
$(x^{VI})(x^{VII})$

11.° $f(x''')(x^{IV})(x')(x'')(x^{IX})(x^{X})(x^{V})(x^{VI})$
$(x^{VII})(x^{VIII})$

12.° $f(x'')(x''')(x^{IV})(x')(x^{X})(x^{V})(x^{VI})(x^{VII})$
$(x^{VIII})(x^{IX})$

tutti uguali fra loro, e questi dovranno essere tanti di numero, quanti se ne ottengono, finchè ritorna il primo, ossia finchè le radici delle due componenti tornano tutte insieme alla prima lor posizione: ora le radici della prima componente pei (N.i 258, 262) vi ritornano ad ogni quattro risultati, e quelle della seconda vi ritornano ad ogni sei: dunque sì le une, che le altre di tali radici non potranno tutte insieme ricuperare la posizione loro primiera, che dopo un numero di risultati multiplo del 4, e multiplo del 6; ma il numero minore, che gode di questa proprietà si è il 12, come è facile a vedersi, a cagione di $4 = 2 . 2$, di $6 = 2 . 3$, e del 2 massimo comun divisore fra questi due numeri 4, 6. Dunque dodici saranno i risultati (V), e 12 il grado richiesto di uguaglianza.

Se siano b le radici, che impiegansi nella prima permutazione componente, c quelle della seconda, e se sia $b = ng$, $c = nh$, essendo n il loro massimo comun divisore; nel modo medesimo troveremo dover essere p multiplo tanto del numero b, come dell' altro c, ed essere perciò $p = ngh$.

Se la nostra permutazione contenga tre, quattro, ec. permutazioni componenti, e se b, c, d,

 ec.

ec. ci esprimono i numeri delle rispettive radici; supposto n il loro massimo divisor comune, e supposto $b = ng$, $c = nh$, $d = ni$, ec., vedremo egualmente dover essere $p = ngh i \ldots$

265. Determinare il grado di uguaglianza, allorchè la y conserva il proprio valore per una permutazione composta del *primo genere*.

Siano due le permutazioni componenti, sia G il numero dei risultati, che ottengonsi dalla y mediante la prima di queste considerata da se sola, e siano H i risultati, che nella stessa guisa ricavansi dalla y col mezzo della seconda. Poichè pel (N.° 259) le nostre permutazioni competenti sono in tutto, e per tutto indipendenti fra loro, trovati tutti i G risultati, che nascono dalla prima di esse, è chiaro, che sù ciascuno dei medesimi potrò eseguire la permutazione seconda; ma per tale operazione da ciascuno dei G valori se ne ottiene un numero H; dunque sarà GH il numero totale di questi risultati, e per conseguenza sarà $p = \mathrm{GH}$.

Se sia $m = 5$, e per una permutazione composta del *primo genere* vogliasi $f(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}}) = f(x'')(x')(x^{\mathrm{V}})(x''')(x^{\mathrm{IV}})$, onde si abbia $\mathrm{G} = 2$, $\mathrm{H} = 3$, sarà $p = 2 \cdot 3 = 6$, e perciò $\frac{\pi}{\mathrm{GH}} = \frac{120}{6} = 20$.

Nella ipotesi, che tre, quattro, ec. siano le permutazioni componenti, e che I, K, ec. ci esprimano corrispondentemente i risultati, che nascono dalla y per la terza, la quarta, ec. di queste,

nella

nella maniera medesima troveremo dover essere in corrispondenza $p = GHI$, $p = GHIK$, ec.

266. Chiamato q il numero totale delle radici, che impiegansi in una data permutazione, per cui la y non cambia di valore, se questo q sia numero primo, la permutazione supposta non potrà giammai essere semplice del *genere secondo*.

Se ciò si nega, sia la permutazion, che si vuole semplice del *secondo genere*, formata di due sole componenti, la prima di un numero b di radici, e la seconda di un numero c, cosicchè $b + c = q$. A cagione di q numero primo, b, c devono essere due numeri primi fra loro: ma il grado di uguaglianza p (N.° 261) deve esser multiplo di amendue questi numeri (N.° 264); dunque dovrà essere $p = bc$. Nel modo istesso, se tre, quattro, ec. sono le permutazioni componenti, e se b, c, d; b, c, d, e; ec. sono rispettivamente i numeri esprimenti le loro radici, troveremo dover essere $p = bcd$, $p = bcde$, ec.. Ma se p à questi valori, è facile a vedersi dal (N.° 265), che la permutazione è composta del *primo genere*. Dunque ec.

267. Da ciò segue evidentemente, che, se una funzione $y = f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})$ è di tal forma, che abbiasi $f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}}) = f(x^{\text{V}})(x')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x''')$, ciò non potrà succedere, che per una permutazione composta del *primo genere*, e quindi sarà ancora $f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}}) = f(x'')(x')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})$.

268. Lasciando nella precedente funzione y

 la

la x^{v} sempre a suo luogo, facciamo tutte le possibili permutazioni fra le altre $5 - 1 = 4$ radici, e scriviamo nella tavola (*VI*) (*), in una prima colonna verticale, tutti i risultati, che ne derivano. In seguito portiamo in ciascuno di questi risultati della prima colonna la prima cifra nell' ultimo luogo, facendo retrocedere tutte le altre come si trovano: replichiamo questa operazione, quanto è possibile, e scriviamo tutti i valori, che ne nascono in tante colonne verticali. Ciò fatto osservo, che la prima colonna è composta di $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ risultati diversi fra loro, osservo inoltre, che da questi si anno $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ fila orizzontali, in ciascuna delle quali i valori vengon prodotti per una permutazion semplice del *genere primo* fra tutte le 5 radici. Dunque in ciascuna fila trovandosi 5 risultati diversi (N.° 262), la somma totale dei risultati (*VI*) sarà $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$, e questi per conseguenza saranno i valori tutti, che ottengonsi dalla y, nel farsi sù di essa tutte le possibili permutazioni, come nella Tav. (*VI*).

269. Supposte α, β, γ, δ, η, ec. le radici della data (D), abbiasi di esse una funzione, la quale non cambi di valore per una qualunque permutazione semplice del *primo genere*, per quella, a cagione di esempio, fra le prime cinque radici di α in γ, di γ in η, di η in δ, di δ in β, e di β in α. Poichè le lettere x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, ec., di cui ci serviamo a rappresentar le radici, sono per

(*) Vedi la Tavola posta nel fine di questo Capitolo.

per se indifferenti a rappresentarne piuttosto alcune, che altre; espressa con la x^{v} una qualunque delle α, β, γ, δ, η, per esempio la β, denominiamo x' quella, che nella permutazione va ad occupare il luogo della β, cioè la α; esprimiamo con x'' quella, che va a porsi invece della α, cioè la γ; chiamiamo x''' l' altra, che và al luogo della γ, cioè la η; e finalmente chiamiamo x^{iv} quella, che portasi al luogo della η, cioè la δ. Ciò fatto, nello scrivere giusta il (N.° 2) una funzione qualunque delle x', x'', x''', ec., essendo evidentemente indifferente lo scrivere prima una delle radici, che un' altra, potremo esprimere la funzione data fra le α, β, γ, ec. con la
$f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})\ldots$, e ciò eseguito la permutazione supposta ci darà

$$(VII)\quad f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})\ldots = f(x'')(x''')(x^{iv}(x^{v})(x')\ldots$$

Dunque se una funzione delle radici della data è tale, che non cambi di valore ad una permutazione semplice del *primo genere* fra cinque delle radici, tale funzione, e tale permutazione, qualunque siansi, potranno venir sempre espresse dalla (*VII*). Se il numero delle radici, che impiegansi nella permutazione, è diverso dalle cinque, vedremo in egual modo, che la funzione, e la permutazione corrispondente possonsi sempre rappresentare con espressione simile alla precedente.

270. Restando i $\pi = 120$ valori della $y = f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$ fra loro uguali a p a

p per

p per una permutazione composta del *secondo genere* (N.° 259), determinare il valore del numero p.

Essendo cinque soltanto le radici della funzione supposta; dal (N.° 260) è chiaro, che nella permutazione composta del *secondo genere* ciascuna delle componenti non potrà, che contenere due sole radici. Dunque la nostra y non cambiando valore per una simile permutazione, applicato quì pure il raziocinio del (N.° prec.), potrà sempre ridursi alla forma $f((x', x''), (x''' x^{\text{v}}))(x^{\text{v}})$ (N.° 3), e quindi, per questa avremo $p = 2 . 2 . 2 . = 8$.

Che se oltre la forma precedente si volesse, che la nostra y fosse tale, che potesse acquistare anche l' altra $f(x')((x'', x'''), (x^{\text{iv}}, x^{\text{v}}))$: allora avendosi nella Tavola (*VI*) il risultato 1.° = 51.° ne verrebbe per la forma supposta a principio esso 1.° $f((x', x''), (x''', x^{\text{iv}}))(x^{\text{v}}) = f((x', x^{\text{iv}}), (x^{\text{v}}, x''))(x''')$, e però la y non resterebbe più la medesima per una permutazione composta del *genere secondo*, ma per una del *terzo* (N.° 259), il che è contro la supposizione. Dunque nella nostra ipotesi non può la p, che avere il valore 8.

271. Determinare il numero p allora quando i 120 valori della nostra y rimangono fra loro uguali per una permutazione del *terzo genere* composta, in cui la prima delle componenti sia semplice, e comprenda tutte insieme le cinque radici della funzione.

Qua-

Qualunque siasi la seconda permutazione componente, espressa la prima pel (N.° 269) con l' equazione (VII), tutti i cinque risultati della prima fila nella (Tav.ª VI) riduconsi per essa al solo 1.° (N.° 261), tutti i risultati della fila seconda riduconsi al solo 2.°, e così di seguito; dunque per questa prima permutazione i valori tutti della y si ridurranno infine a quei soli della prima colonna verticale, i quali non sono, che di numero $1.2.3.4=24$ (N.° 268), e nei quali tutti la x^{v} trovasi immobile nell' ultimo luogo. Passando in seguito a considerare la permutazione seconda; supponghiamo primieramente, che questa pure sia semplice, e poichè essa può aver luogo fra due, o tre, o quattro, o tutte le cinque radici della y, supponghiamo

1.° Che abbia luogo fra due, e queste saranno le x', x'', onde il 1.° trai valori (*VI*) divenga $f(x',x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$. Pel (N.° 97) il risultato 25.° diventerà $f(x'',x''')(x^{\prime v})(x^{v})(x')$; ma questo risultato 25.° a cagione della prima permutazion componente non solo è uguale, ma è identico, ed uno stesso col risultato 1.°. Dunque se il 25.° non cambia di valore, come non lo cambia di fatti, alla permutazione di x'' in x''', non lo cambierà neppure alla permutazione medesima il 1.°, e per conseguenza esso 1.° restando il medesimo non solo pel cambiamento di x' in x'', ma per quello eziandio di x'' in x''', acquisterà la forma $f(x',x'',x''')(x^{\prime v})(x^{v})$. Il risultato 25.°

dive-

divenendo perciò $f(x', x''', x^{IV})(x^{V})(x')$, resterà il medesimo alla permutazione reciproca fra le x'', x''', x^{V}. Dunque per la ragione ora addotta dovendo alla permutazione istessa fra le stesse tre radici x'', x''', x^{V} rimanere il medesimo anche il risultato primo, esso diventerà $f(x', x'', x''', x^{IV})(x^{V})$. Ora proseguendo lo stesso raziocinio, si trova, che in fine il risultato 1.°, ossia la y aver deve la forma $f(x', x'', x''', x^{VI}, x^{V})$. Dunque in questo primo caso avremo $p = 1.2.3.4.5 = 120$.

2.° Supponghiamo, che la permutazione seconda riguardi altre due radici diverse dalle precedenti x', x'', per esempio, le due x', x''', oppure le x'', x^{V}, onde si abbia il risultato 1.° = 6.°, ovvero esso 1.° = 83.° Nel primo di questi casi avendosi per la permutazione prima il risultato 6.° = 30.°; sarà ancora il 1.° = 30.°; ma se ciò succede, ne viene pel (N.° 266) il 1.° = 2.°; dunque la y acquisterà la forma $f(x', x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$. Nel secondo poi dei supposti casi, se il risultato primo non cambia valore al cambiamento reciproco delle radici, che occupano il secondo, e il quinto luogo, non lo cambierà neppure il 25.° alla mutazione reciproca delle radici x', x''' (N.° 97); ma il 25.° = 1.°, dunque al cambiamento medesimo di x' in x''', esso 1.° non cambierà neppur di valore, e quindi avendosi il 1.° = 6.°, questo si ridurrà al caso precedente, e però la y acquistando ancor quivi la forma $f(x', x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$ sempre ci darà $p = 1.2.3.4.5 = 120$ (prec. 1.°). Lo stesso so sempre si ritrova, se le due radici a permutarsi sono diverse dalle considerate finora.

3.° Succeda la seconda permutazione componente fra tre radici, cioè fra le tre x', x'', x''', così che si abbia il risultato

$$1.° f(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}}) =$$
$$3.° f(x'')(x''')(x')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}}) =$$
$$4.° f(x''')(x')(x'')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}}).$$

In conseguenza di ciò il risultato 25.° rimarrà lo stesso alla permutazione semplice fra le x'', x''', x^{IV}; ma questo 25.° per la prima, e la seconda permutazion componente è identico, ed uno col 1.°, col 3.°, e col 4.°: dunque eseguendo fra le stesse x'', x''', x^{IV} la permutazione medesima negli accennati 1.°, 3.°, e 4.° risultati, nessuno di essi per questa cambierà di valore. Ora per tale proprietà il risultato 3.° non cangia valore alla permutazione semplice tra le radici, che occupano il primo, il secondo, e il quarto posto; e il risultato 4.° non lo cangia alla permutazione istessa fra le radici, che sono nei posti primo, terzo, e quarto. Dunque pel (N.° 98) anche il risultato 1.° resterà il medesimo alla permutazione semplice delle tre radici, che occupano i posti primo, secondo, e quarto, e per quella delle radici, che occupano i posti primo, terzo, e quarto; ma tal risultato 1.°, per quanto abbiam detto, resta anche il medesimo per la permutazione semplice delle radici, che esistono nei luoghi primo, secondo, e terzo, e per l' altra delle radici esis-

 tenti

tenti nei luoghi secondo, terzo, e quarto. Dunque se nel risultato 1.° troviamo tutte le combinazioni a tre a tre delle x', x'', x''', x^{IV}, e se sopra ciascuna di queste combinazioni pratichiamo la nostra permutazione semplice, sempre esso 1.° conserverà il suo valore. Ma queste combinazioni sono in numero $\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3} = 4$, e corrispondentemente a ciascuna di esse praticando, e replicando, quanto è possibile, la supposta permutazione semplice, ottengonsi dodici risultati, nei quali tutti la x^{V} occupa l' ultimo luogo. Dunque per tale permutazione i 24 valori della prima colonna dovranno essere fra loro uguali a 12 a 12, avendosi così il

(VIII) 1.° = 3.° = 4.° = 17.° = 21.° = 19.° = 12.° = 10.° = 14.° = 8.° = 24.° = 22.° ed il 2.° = 5.° = 6.° = 23.° = 15.° = 13.° = 9.° = 7.° = 20.° = 11.° = 18.° = 16.°;, e per conseguenza a cagione della permutazion prima in questo terzo caso avremo $p = 12 \cdot 5 = 60$.

4.° Siano pur anche tre le radici della permutazione seconda, e siano queste, per esempio, le x', x''', x^{IV} onde divenga il risultato 1.° = 19.° = 12.°. Effettuando questa permutazione sù quella fra i cinque risultati della prima fila, nel quale la x^{V} resta esclusa dalla permutazione medesima, cioè nel nostro caso, sù 'l 73.°; vedesi, che questo 73.° non cambierà di valore al cambiamento fra le radici x^{V}, x', x''. Dunque alla mutazione

ne

ne medesima fra le stesse x^{IV}, x', x'', non cangiando neppur di valore i precedenti tre risultati 1.°, 19.°, 12.°, potrò sù di essi replicare il raziocinio medesimo del (prec. 3.°); e però ancora in questa supposizione ricaveremo $p=60$. Che se x'', x^{IV}, x^{V} son le radici date a permutarsi; il risultato 97.° restando perciò il medesimo al cambiamento fra le x', x''', x^{IV}, tale rimarrà ancora il risultato 1.°, mentre in esso si cambino fra loro le stesse x', x''', x^{IV}; dunque questo caso si ridurrà al precedente, e per conseguenza quì pure otterremo $p=60$. Lo stesso trovasi in egual modo in tutti gli altri, in cui tre siano le radici, che impieganṡi nella permutazione seconda.

5.° Siano quattro le radici della seconda permutazion componente, ed essendo questa semplice del *secondo genere*, vogliasi il risultato.

1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}}) =$
8.° $f(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x')(x'')(x^{\mathrm{V}})$.

Per questa seconda permutazion componente dovrà il 25.° restare il medesimo alla mutazion simultanea di x'' in x^{IV}, e di x''' in x^{V} (N.° 97); dunque a cagione del 25.° identico col 1.°, per quanto abbiam detto precedentemente, dovrà essere questo 1.° = 51.°, e però = 3.°, poichè per la prima permutazion componente il 51.° = 3.°. Ora il 3.° nasce dal 1.° per la permutazione semplice fra le sole tre radici x', x'', x''', dunque questo caso racchiude quello del precedente caso 2.°. Ma questo precedente 2.° dandoci, come si

 vede

vede in (*VIII*), il risultato 1.° = 8.° racchiude il terzo caso ora supposto. Dunque i nostri due casi 2.°, e 3.° sono identici fra di loro, e quindi anche in quest' ultimo si verificheranno le ugualianze (*VIII*), e sarà $p=60$.

6.° Se la precedente permutazione seconda (Caso 5.°) sia tale, che abbiasi il risultato 1.° = 22.°, troveremo in egual modo dover essere $p=60$: ma se per essa divenga il risultato 1.° = 24.°; allora replicando i soliti raziocinii, sopra qualunque dei risultati della prima fila si applichi questa permutazione supposta, e qualunque nuova permutazione venga perciò a generarsi nel risultato 1.°, da esso non si producono mai altri risultati, che quegli esistenti nell' ultima fila. Dunque i risultati in questo caso uguali al primo essendo quei soli delle fila prima, ed ultima, vedesi, che avremo $p=10$.

Che se poi in questa permutazione seconda invece di una fila delle prime quattro radici, per esempio, invece della x' entra la x^{v}; effettuando allora, come nel (caso 4.°) tale permutazione sù quello dei cinque risultati della prima fila, nel quale la x^{v} resta esclusa dalla permutazione medesima, nel nostro caso sopra del 97.°, vedo, che in esso tal cangiamento viene a prodursi fra le x', x'', x''', x^{v}. Dunque a cagione di questo 97.° = 1.°, dovendo pel cangiamento istesso fra le stesse radici x', x'', x''', x^{v} rimanere il medesimo anche il risultato 1.°, vedesi, che la permutazione supposta fra le quattro radici, compresavi

savi la x^{v}, si riduce infine ad un' altra fra quattro radici, nella quale la x^{v} resta esclusa, e però, che tutti questi ultimi così riducendosi sempre ai precedenti (5.°, e 6.°) sempre ci daranno $p = 60$, oppure $p = 10$.

7.° Rimanendo quattro le radici della seconda permutazione componente sia questa una semplice del *genere primo*, e sia perciò il risultato

$$\begin{aligned}
&1.° \; f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v}) = \\
&7.° \; f(x'')(x''')(x^{iv})(x')(x^{v}) = \\
&8.° \; f(x''')(x^{iv})(x')(x'')(x^{v}) = \\
&9.° \; f(x^{iv})(x')(x'')(x''')(x^{v}).
\end{aligned}$$

Poichè in conseguenza della supposizione fatta esser deve il 1.° = 8.°, e poichè questa uguaglianza quella si è, che abbiamo supposta nel (prec. Caso 5.°); ne segue evidentemente, che dovrà essere ancora il nostro risultato 1.° = 3.°. Ora tale uguaglianza del 1.° al 3.° unita all' altra del 1.° al 25.° pel (prec. Caso 3.°) ci dà, che la nostra funzione deve eziandio restar la medesima alla permutazione semplice delle tre radici, che occupano i luoghi secondo, terzo, e quarto. Dunque dovrà essere ancora il risultato 7.° = 20.° = 2.°; ma il 7.° = 1.°; dunque sarà esso 1.° = 2.°, e però la y acquistando la forma $f(x', x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$, diverrà tale, qual fu la supposta nel (Caso 1.°); ma in questo caso trovammo, che essa y finalmente aver deve la forma $f(x', x'', x''', x^{iv}, x^{v})$; dunque tale funzione avrà la forma medesima anche

che in questo quarto caso, e quì pure per conseguenza avremo $p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

8.° Per la permutazion precedente (Caso 7.°) possonsi dare ancora due casi diversi dall' accennato, nei quali entrano le sole prime quattro radici, e tali sono quelle del 1.° = 11.°, e l' altro del 1.° = 13.°, per cui risulta il 1.° = 11.° = 22.° = 18.°, ovvero esso 1.° = 13.° = 24.° = 20.°. Nel primo di questi casi avendosi il 1.° = 22.°, rinnovato il discorso precedente (Caso 7.°) pel (Caso 6.°) troveremo $p = 120$, ma nell' altro, a cagione del 1.° = 24.°, non è difficile a vedersi dal (Caso 6.°), che dovrà essere $p = 20$. Nel modo stesso poi, che abbiamo accennato sul fine del (Caso 6.°), troveremo, che dovrà essere sempre $p = 120$, ovvero $p = 20$ anche allorquando fra le quattro radici appartenenti alla seconda permutazione viene compresa la x^{V}.

9.° La seconda permutazion componente essendo semplice del *primo genere* riguardi tutte cinque le radici della y. Dovendo per questa la x^{V} muoversi dal suo luogo, il risultato, che dal 1.° immediatamente deriva, non potrà esistere nella prima colonna. Ora tal risultato vedesi dalla Tavola (*VI*), che deve esistere o nella 1.ª fila, o in qualcuna delle seguenti 3.ª, 4.ª, 8.ª, 10.ª, 12.ª, 14.ª, 17.ª, 19.ª, 21.ª, 22.ª. Se esiste nella 1.ª, come nella ipotesi, che ne venga il risultato 1.° = 73.°; avendosi allora per la permutazion prima il 1.° = 25.° = 49.° = 73.° = 97.°, e per la

se-

seconda il 1.° = 73.° = 25.° = 97.° = 49.°, queste saranno identiche fra di loro, e non potranno però, che darci $p = 5$. Che se il risultato proveniente dal 1.°, che dirò risultato secondo, esiste in qualche altra delle fila ora accennate, allora osservo nella fila istessa il risultato, che gli corrisponde nella prima colonna verticale: ma quest' ultima è sempre tale, che nasce dal primo per una permutazione semplice fra tre sole radici, o per una semplice del *secondo genere* fra quattro, come apparisce dai precedenti numeri esprimenti le fila paragonati coi numeri (*VIII*). Dunque a cagione della permutazione prima essendo quest' ultimo risultato identico col secondo, se replicheremo quì lo stesso raziocinio, che abbiamo fatto pel (Caso 5.°) troveremo in modo eguale, che il caso presente riducesi sempre ad uno dei quattro (3.°, 4.°, 5.°, 6.°), e però, che avremo $p = 60$. Avvertasi, che tra le fila sopraccennate non avendo luogo la 24.ª, non potrà giammai essere quivi, come nel (Caso 6.°) $p = 10$.

10.° Se finalmente anche la seconda permutazione componente sia della classe delle composte: essendo in allora questa pure formata di altre componenti, in ciascuna delle quali entreranno o due, o tre, o quattro, o cinque radici; è facile il vedere dai (Casi prec.) che la p dovrà acquistar sempre uno dei valori seguenti 120, 60, 20.

272. Con raziocinii simili ai precedenti potremo sempre determinare il valore del numero

p; an-

p, anche allorquando il numero delle radici, che formano la prima permutazion componente, sia minore di cinque.

237. Eseguita nel risultato 1.° (Tav. *VI*) una permutazione qualunque, quella per esempio di x' in x'', e osservato quali radici vengono smosse per tale permutazione in ciascuno dei risultati della prima fila, cioè nel nostro caso le due x'', x''' nel risultato 25.°; le x''', x^{IV} nel 49.°; le x^{IV}, x^{V} nel 73.°, e le x^{V}, x' nel 97.°; se suppongo la y tale, che il risultato 1.° resti sempre il medesimo, mentre la permutazione supposta si eseguisca in esse fra due qualunque delle accennate radici, cioè fra le due x', x'', oppur fra le due x'', x''', oppure ec., cosicchè ne venga esso 1.° = 2.° = 5.° = 16.° = 33.° = 103°; io dico, che in simile caso dovrà sempre ricavarsi tal risultato 1.° = 25.°.

1.° Eseguisco in questa prima supposizione la permutazione seconda sul risultato 2.°, e avuta l' Equazione 2.° = 3.°, effettuo sù questo 3.° la permutazione terza; ottenuto così il 3.° = 7.° faccio sù del 7.° la permutazione quarta, ma quindi ne nasce il 7.° = 25.°. Dunque sarà ancora il 1.° = 25.°

2.° Siano le permutazioni componenti di tre radici, e giusta l' enunciato del Teorema suppongasi perciò il risultato 1.° = 3.° = 10.° = 28.° = 38.° = 80.°. Applicando al risultato 3.° la permutazione terza ne viene esso 3.° = 25.°. Dunque ec.

3.°

3.° Supposte quattro le radici da permutarsi, e ciascuna permutazion componente supposta semplice del *secondo genere*, sia il risultato 1.° = 22.° = 45.° = 113.° = 36.° = 115.°: dall' Equazione 36.° = 45.° si ricava il 1.° = 3.°, ed il 113.° = 52.°; ma dalla 113.° = 115.° si vede dover essere il 52.° = 80.°, e però il 1.° = 28.°. Dunque applicando quest' ultima permutazione al risultato 3.° otterremo il 3.° = 25.°, e però ec.

4.° Siano quattro tutt' ora le radici, ed essendo le permutazioni componenti semplici del *genere primo*, si abbia il risultato 1.° = 7.° = 26.° = 29.° = 40.° = 57.°. Per le Equazioni 26.° = 29.°, 40.° = 57.° abbiamo corrispondentemente le altre 1.° = 3.°, 1.° = 28.°. Dunque, come nel (prec. 3.°), ne verrà il 3.° = 25.°, e per conseguenza ec.

5.° Essendo cinque le radici esistenti in ciascuna permutazione, supponghiamo il risultato 1.° = 27.° = 34.° = 52.° = 62.° = 104.°. Poichè dalla 62.° = 104.° ottienesi il 34.° = 43.°, sarà il 1.° = 3.°; ma per la 52.° = 62.° si ricava il 43.° = 82.°; e quindi si à il 1.° = 28.°. Dunque risultando il 3.° = 25.°, ne viene, che ec.

6.° Tutti gli altri casi essenzialmente differenti tra loro, e differenti dagli esposti fin' ora, sù de' quali si verifica quanto è stato supposto nell' enunciato del Teorema, sono i seguenti:

Mentre in ciascuna permutazione impiegansi due radici, il risultato 1.° = 6.° = 33.° = 66.° = 15.° = 83.°.

Mentre s' impiegano tre radici, il risultato
1.° = 17.° = 60.° = 19.° = 46.° = 69.°.

Quando le radici impiegate sono quattro, ciascuna mutazione è semplice del *secondo genere*, il risultato 1.° = 8.° = 51.° = 58.° = 76.° = 86.°
1.° = 24.° = 96.° = 48.° = 120.° = 72.°

Allorchè con quattro radici eseguisconsi delle permutazioni semplici del *genere primo*, il risultato 1.° = 11.° = 54.° = 71.° = 114.° = 63.°
1.° = 13.° = 37.° = 61.° = 85.° = 109.°

Quando finalmente le radici a permutarsi sono cinque il risultato 1.° = 75.° = 82.° = 100.° = 110.° = 32.°.

Ora in tutti questi casi possonsi sempre eseguire dei discorsi simili ai precedenti (Casi 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, 5.°), come può ognuno vedere non difficilmente da se medesimo. Dunque ciascuno di essi ci darà sempre il risultato 1.° = 25.°.

Se le permutazioni componenti fossero composte esse pure, vedesi facilmente doversi anche allora verificare il nostro Teorema.

274. Da quanto si è esposto nei (N.i 262, 263, 267, 271) dedurremo non difficilmente, che se la $y = f(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})$ resta la medesima per una permutazione qualunque, in cui non esista alcuna permutazion componente semplice del *primo genere* fra tutte cinque le x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}; dedurremo, dissi, non difficilmente, che in allora il grado di uguaglianza p non potrà giammai essere multiplo del 5.°.

275.

275. Per qualunque permutazione vogliansi fra loro uguali i 120 valori della nostra y, non potrà mai il numero p acquistare i valori 15, 30, 40.

Se ciò fosse possibile, a cagione dei numeri 15, 30, 40 tutti e tre multipli del 5, dovrebbe pel (N.° 274) nella permutazione supposta esistere una componente semplice fra tutte cinque le radici; ma se questa succede, il numero p non può acquistar, che i valori 5, 120, 60, 10, 20 (N.i 262, 271). Dunque ec.

276. Volendosi trasformare un' Equazion generale del quinto grado in un' altra di grado inferiore al suo proprio; dai (N.i 275, 99, 105) apparisce, che potrò bensì ottenere delle Trasformate del primo, oppure del secondo grado; ma non ne potrò ottenere giammai alcuna del quarto, o del terzo.

277. Se vogliasi Z radice di un' Equazione della forma $Z^5 - M = 0$, e funzione insieme delle radici di un' Equazion generale del quinto grado

(Q) $x^5 + A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E = 0$;

io dico, che essa Z dovrà avere i suoi 120 valori (N.° 92) tutti disuguali tra loro.

Espressi con le lettere Z', Z'', Z''', Z^{iv}, Z^{v}, Z^{vi}, Z^{vii}, Z^{viii}, ec. i valori tutti della Z, e con le prime cinque rappresentate le cinque radici nella $Z^5 - M = 0$; chiamo α una delle radici quinte della unità differente dalla unità medesima. Dovendo pel (N.° 203) aversi $Z' = \sqrt[5]{M}$, $Z'' = \alpha\sqrt[5]{M}$,

$Z''' = \alpha^2 \sqrt[5]{M}$, $Z^{IV} = \alpha^3 \sqrt[5]{M}$, $Z^{V} = \alpha^4 \sqrt[5]{M}$, è chiaro, che sarà $Z'' = \alpha Z'$, $Z''' = \alpha^2 Z'$, $Z^{IV} = \alpha^3 Z'$, $Z^{V} = \alpha^4 Z'$, che questi primi cinque valori sono già tutti necessariamente fra lor disuguali (N.° 199), e che posson' essi rappresentarsi con i cinque 1.°, 25.°, 49.°, 73.°, 97.° della (Tav. *VI*) (N.° 269), rappresentando con gli altri della Tavola istessa tutti i susseguenti Z^{VI}, Z^{VII}, Z^{VIII}, ec. uguali, o disuguali fra loro. Ciò posto, se non si vuole, che i 120 valori della Z siano tutti fra lor differenti, supponghiamo, se è possibile, che due per esempio dei medesimi siano fra loro uguali. Essendo la (Q) un' Equazion generale, ed essendo la Z funzione delle sue radici, vedesi, che la supposta uguaglianza non potrà aver luogo, quando ciò non dipenda dalla forma della $f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$. Supponghiamo pertanto essa tale, che Z' non cambi di valore alla permutazione di x' in x''': per questa ipotesi la Z'' non dovrà cambiar di valore alla mutazione di x'' in x^{IV}, la Z''' non dovrà cambiarlo a quella di x''' in x^{V}, la Z^{IV} all' altra di x^{V} in x', e la Z^{V} a quella di x^{V} in x''. Ora altro non essendo le quantità Z'', Z''', Z^{IV}, Z^{V}, che la stessa Z' moltiplicata in corrispondenza per le α, α^2, α^3, α^4, è chiaro, che se quelle rimangono rispettivamente le medesime alla mutazione reciproca delle x'', x^{IV}, delle x''', x^{V}, delle x', x^{IV}, e delle x'', x^{V}, dovrà ancora la Z' rimanere la medesima alla mutazione in essa delle stesse radici,

cioè

cioè per la mutazione fra loro delle x'', $x^{\prime v}$, e per quella della x''', x^{v}, e per quella delle x', $x^{\prime v}$, e per l' altra finalmente delle x'', x^{v}; ma se questo succede pei (N.^{i} 273, 261), deve seguirne il risultato $1.^{o} = 25.^{o} = 49.^{o} = 73.^{o} = 97.^{o}$. Dunque sarà ancora $Z' = Z'' = Z''' = Z^{\prime v} = Z^{v}$, il che è impossibile.

Se due, o più dei valori della Z vogliansi fra loro uguali per altre permutazioni quali si vogliono diverse dalla precedente; rinnovato l' esposto discorso pel (cit.^{o} N.^{o} 273) sempre si giunge nella maniera medesima al medesimo assurdo di dover essere $Z' = Z'' = Z''' = Z^{\prime v} = Z^{v}$. Dunque sarà impossibile, che i 120 valori della supposta Z non siano tutti disuguali fra loro.

278. Pertanto il coefficiente M della nostra $Z^{5} - M = 0$ dovrà avere 24 valori tutti differenti, e chiamati questi M 1, M 2, M 3, M 4, ec. M 24, i 120 valori della Z saran contenuti nelle 24 equazioni $Z^{5} - M\,1 = 0$, $Z^{5} - M\,2 = 0$, $Z^{5} - M\,3 = 0$, ec., $Z^{5} - M\,24 = 0$.

279. Essendo Z', Z'', Z''', $Z^{\prime v}$, Z^{v} le radici della $Z^{5} - M\,1 = 0$, poichè abbiamo $Z'^{5} = M\,1$, $Z''^{5} = M\,1$, $Z'''^{5} = M\,1$, $Z^{\prime v 5} = M\,1$, $Z^{v5} = M\,1$, e poichè pel (N.^{o} 277) dalla (Tav.^{a} *VI*) abbiamo $Z' =$ ris.^{o} 1, $Z'' = 25.^{o}$, $Z''' = 49.^{o}$ $Z^{\prime v} = 73.^{o}$, $Z^{v} = 97.^{o}$, sarà ancora M 1 $-$ (ris.^{o} $1.^{o})^{5} = (25.^{o})^{5} = (49.^{o})^{5} = (73.^{o})^{5} = (97.^{o})^{5}$; e quindi si vede, che anche la M è una funzione delle x', x'', x''', $x^{\prime v}$, x^{v}, ma una funzione

tale,

tale, che non cambia valore per la permutazione, da cui produconsi nella nostra Tavola i risultati della prima fila. Corrispondendo adunque i 24 valori diversi della M ai 24 della prima colonna verticale, sarà $M\,1 = (\text{ris.}^{\circ}\,1.^{\circ})^5$, $M\,2 = (2.^{\circ})^5$, $M\,3 = (3.^{\circ})^5$, ec. $M\,24 = (24.^{\circ})^5$.

280. Trasformata pel (N.° 276) la (Q) nella Equazione di secondo grado $y^2 + my + n = 0$, cercare dipendentemente da questa, se è possibile, la soluzione della proposta (Q).

Con lo scioglimento di questa Trasformata ottenuti i valori delle sue radici, che chiamerò y', y'', non avremo, onde risolvere il nostro Problema, che a cercare dipendentemente da essi i valori delle x', x'', x''', x^{v}, x^{v}, ma, per quanto si disse nel (N.° 230), ciò non può eseguirsi immediatamente; converrà dunque procurare di farlo mediatamente, cercando in primo luogo, come nel (cit.° N.° 230), dipendentemente da y', oppure da y'' il coefficiente M di un' Equazione $Z^5 - M = 0$, e poscia dai cinque valori Z', Z'', Z''', Z^{v}, Z^{v} deducendo in corrispondenza i cinque x', x'', x''', x^{v}, x^{v}. Ora per la ipotesi i 120 valori della y riduconsi a due soli
$y' = 1.^{\circ} = f(x')(x'')(x''')(x^{\text{v}})(x^{\text{v}})$,
$y'' = 2.^{\circ} = f(x'')(x')(x''')(x^{\text{v}})(x^{\text{v}})$ (3.°, 4.°, 5.°, 6.°, 9.° N.° 271), e pel (N.° 278) il coefficiente M à necessariamente 24 valori diversi corrispondenti ai 24 della prima colonna verticale nella nostra Tavola (N.° 279). Dunque per la de-

la determinazione di questo coefficiente M dipendentemente dalle quantità y', y'' dovremo pel (N.° 147) cadere in due Equazioni del 12.° grado, la prima delle quali pel (cit.° N.° 147) avrà per radici i valori M 1, M 3, M 4, M 17, M 21, M 19, M 12, M 10, M 14, M 8, M 24, M 22, e la seconda i valori M 2, M 5, M 6, M 23, M 15, M 13, M 9, M 7, M 20, M 11, M 18, M 16.

Prendiamo a considerare più particolarmente i 12 valori della M dipendentemente da y, e sia

(*IX*) $M^{12} + a M^{11} + b M^{10} + c M^{9} + \text{ec.} = 0$

l' Equazione, che li contiene. Essendo necessario il conoscere almeno uno dei valori della M, ed essendoci ignota la soluzione generale di un' Equazione del 12.° grado, converrà pel nostro intento, che la M sia una funzione delle x', x'', x''', x^{IV}, x^{V} tale, che la (*IX*) sia riducibile ad altra Equazione, che io sappia sciogliere, e dalle cui radici sappia poi ricavare le radici sue.

1.° Supponghiamo pertanto essa M tale, che la Equazione (*IX*) sia riducibile ad un' altra di quarto grado, per esempio, alla

(*X*) $N^4 + p N^3 + q N^2 + r N + s = 0$.

In tal caso, determinate colla soluzione di questa le radici N', N'', N''', N^{V}, dai valori di esse cercherò separatamente le radici della (*IX*), e queste troverò pel (N.° 147) condotto a quattro Equazioni tutte del terzo grado.

Ma è egli possibile, che la nostra (*IX*) sia riducibile ad un' Equazione (*X*)? Affine di ciò conosnoscere, osservo, che dipendendo i valori della M in (IX) da y', dalla stessa y' dipenderanno ancora i valori della N, e quindi da questa funzione invece dei valori della M potremo ricavare immediatamente quei della N. Ora quattro di questi valori dovendosi dedurre da y', e quattro altri da y'', essi sono otto di numero; dunque la N è una funzione delle x', x'', x''', x^{IV}, x^{V} tale, che à il suo grado di uguaglianza

$p = \frac{120}{8} = 15$, e ciò mentre i suoi otto valori siano disuguali fra loro, ed à poi lo stesso grado

$p = \frac{120}{4} = 30$, allor quando si voglia, che i suoi primi quattro valori uguaglinsi ai secondi: ma sì l' uno, che l' altro di questi valori della p sono impossibili (N.° 275). Dunque sarà ancora impossibile una funzione delle x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, quale noi la vogliamo, e però impossibile, che possa la (IX) ridursi ad un' Equazione (X) di quarto grado.

2.° Se non ad una del quarto, veggiamo, se possa la nostra (IX) ridursi ad una Equazione del terzo grado, cioè alla

(XI) $N^3 + pN^2 + qN + r = 0$.

Venendo quì pure la N ad esser tale, che tre dei suoi valori dipendono da y', e tre da y'', o i primi tre fra questi voglionsi corrispondentemente uguali ai secondi tre, o nò. Nel primo di questi

casi

casi ne verrebbe $p = \frac{120}{3} = 40$; ma ciò pel (N.° 275) non può succedere, dunque se è possibile la riduzione della (*IX*) alla (*XI*), dovranno i primi tre valori della N essere disuguali dai secondi tre, e dovrà per conseguenza riescire $p = \frac{120}{6} = 20$. Ora pel (N.° 271) è bensì possibile un tal valore della p, ed è perciò possibile l' esistenza d' un' Equazione di sesto grado, da cui dipendano i sei valori della N; ma è egli poi possibile, che tre di questi possansi ricavare da y', e tre da y''?

Supponghiamo $N = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$, e supponghiamo nella (Tav.ª *VI*) di cambiare la f in φ, onde abbiansi in essa sott' occhio tutti i risultati, che con le solite permutazioni ottengonsi dalla $\varphi(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$. Se col mezzo delle y', y'' noi ricercassimo tutti questi risultati, sessanta dei medesimi dovrebbersi ricavare da y', sessanta da y'', e pel (N.° 279) è chiaro, che i primi 60 sarebbero i contenuti nelle fila 1.ª, 3.ª 4.ª, 17.ª, 21.ª, 19.ª, 12.ª, 10.ª, 14.ª, 8.ª, 24.ª, 22.ª, i secondi 60 quei, che esistono nelle fila 2.ª, 5.ª, 6.ª, 23.ª, 15.ª, 13.ª, 9.ª, 7.ª, 20.ª, 11.ª, 18.ª, 16.ª. Rifletto presentemente, che a cagione di $p = 20$ deve la nostra $\varphi(x')(x'')(x''')(x^{IV})x^{V})$ pel (N.° 274) esser tale, che il 1.° dei suoi primi sessanta risultati deve necessariamente restare il medesimo per una permutazione com-

 posta

posta, in cui entri una semplice del *primo genere* fra tutte e cinque le x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}: ma qualunque siasi una tale permutazione, effettuando questa semplice del *primo genere* sù del risultato 1.°, e replicandola quanto si può, sappiamo dal (1.° N.° 263), che fra i quattro risultati nuovi, che dal 1.° quindi provengono (N.° 262), non può mai contenersene alcuno degli esistenti nella prima colonna verticale; e lo stesso egualmente succede, applicando, e ripetendo la permutazione medesima sopra qualunque altro dei valori 2.°, 3.°, 4.°, ec. 24.°. Ciò dunque essendo, l' uguaglianza, che per l' esposta permutazione succede fra tutti i risultati della (Tav.ª *VI*), farà sì, che i primi *60* si ridurranno ai dodici 1.°, 3.°, 4.°, 17.°, 21.°, 19.°, 12.°, 10.°, 14.°, 8.°, 24.°, 22.°, e i secondi *60* corrispondentemente ai dodici 2.°, 5.°, *6*.°, 23.°, 15.°, 13.°, *9*.°, 7.°, 20.°, 11.°, 18.°, 16.°; ma infine i primi valori della N differenti tra loro devono essere tre soli, che chiamerò N', N'', N''', e i secondi altri tre, che denominarò N^{iv}, N^{v}, N^{vi}. Dunque i primi dodici risultati, a cui ci siamo ridotti, dovranno nuovamente essere fra loro uguali a quattro a quattro, e così uguali a quattro a quattro fra loro i secondi dodici separatamente dai primi. Ora qualunque supposizione si faccia, può ognuno facilmente vedere da se medesimo non potersi questo giammai ottenere. Dunque non potrà nè pure ottenersi giammai, che i tre valori N', N'', N'''

pos-

possansi ricavare da y', e i tre N^{IV}, N^{V}, N^{VI} da y'', e quindi, che la (*IX*) sia riducibile ad una Equazione (*XI*) di terzo grado.

3.° Suppongasi, che l' Equazione, a cui vogliamo potersi ridurre la (*IX*), sia del grado secondo, e tale sia la

(*XII*) $N^2 + pN + q = 0$.

Quì pure o i due valori N', N'' dipendenti da y' suppongonsi disuguali dagli altri N''', N^{IV} dipendenti da y'', o nò. Se si volessero disuguali, allora i valori della N sarebbero in numero di quattro, e però ci risulterebbe $p = \frac{120}{4} = 30$, il che è impossibile (N.° 275). Che se si volesse $N' = N'''$, $N'' = N^{IV}$; in tal caso essendo due soli i valori della N, dovrà questa funzione essere affatto simile alla y (N.° 271). Dunque dalla y' non potendosi propriamente dedurre, che un solo valore della N, dovrà essere $N' = N''$; ma $N' = N'''$, $N'' = N^{IV}$ per la ipotesi; dunque $N' = N'' = N''' = N^{IV}$; e per conseguenza la N non avendo, che un solo valore, sarà inutile all' abbassamento della (*IX*).

4.° Potremo da y' dedurre bensì un' Equazione di primo grado $N + p = 0$; ma è chiaro pel (N.° 147), che neppure da questa ricavasi vantaggio alcuno per lo scioglimento della (*IX*).

5.° Sia la $\varphi(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$ tale, che il suo valore 1.° uguagli il 25.° ed il 24.°. In questa ipotesi essendo $p = 10$ (6.° N.° 271), i

 valo-

valori della N saranno in numero di 12, e sei dei medesimi, cioè i sei 1.°, 3.°, 4.°, 17.°, 19.°, 8.°, potranno benissimo ricavarsi da y', e gli altri sei 2.°, 5.°, 6.°, 23.°, 13.°, 11.° da y'', onde la (*IX*) potrà ridursi ad un' Equazione di sesto grado

(*XIII*) $N^6 + p N^5 + q N^4 + \text{ec.} = 0$.

Ora essendoci ignota la soluzion generale di questa (*XIII*), veggiamo, se può essere abbassabile ad una terza Equazione, di cui conosca la soluzione, e dalle radici della quale possa ricavarne le sue. Dipendendo le radici di questa terza Equazione dalle radici della (*XIII*), verranno esse pure a dipendere dalla y'. Ma pei (1.°, 2.°, 3.°, 4.° N.° pres.) da questa y' non si può giammai dedurre alcuna Equazione o del quarto, o del terzo, o del secondo grado, ed una del primo è inutile. Dunque non sarà neppure possibile, che possiamo abbassare la (*XIII*) ad una terza Equazione opportuna all' intento.

Non potendo pertanto la (*IX*) abbassarsi, che alla (*XIII*), o ad un' Equazione del primo grado, e la soluzione di amendue le (*IX*), e (*XIII*) essendoci incognita; ne viene, che non potrò giammai determinare alcuno dei valori della M nella $Z^5 - M = 0$, e per conseguenza, che mi sarà impossibile la determinazione delle x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, e quindi la soluzione della (Q) dipendentemente dalla $y^2 + my + n = 0$.

281. Quantunque non possa la (*IX*) venir

tras-

trasformata in un' altra Equazione opportuna, pure potrebbe sembrare a taluno potersi essa formare in maniera, che fosse spezzabile in fattori, dai quali poi fosse determinabile qualcuno dei valori della M; ma riflettiamo, che i coefficienti di questi fattori dovrebbero pel (N.° 252) dipendere da delle Equazioni, le quali sarebbero tante Trasformate della (*IX*); dunque sù di esse dovendo applicarsi quanto si è detto nel (N.° 253 prec.), ne viene, che non sarà neppure possibile la determinazione degli accennati fattori.

282. Non sapendosi dalla y' ricavare il valore della M coefficiente della $Z^5 - M = 9$, veggiamo, se mai potesse determinarsi dalla stessa y' un' altra Equazione .

(*XVI*) $Z^5 + PZ^4 + QZ^3 + RZ^2 + SZ + T = 0$

di forma tale, che sappia risolversi indipendentemente dalla soluzion generale della (Q), e pel cui mezzo possiamo per conseguenza determinar le radici x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}.

O si vuole, che il coefficiente P dipendente da y' abbia un solo valore, o si vuole, che ne abbia più di uno. Nel primo di questi casi essendo la (*XIV*) di forma diversa dalla $Z^5 - M = 0$, e dovendo avere le sue cinque radici tutte fra di lor differenti (N.° 230), non potremo pel (N.° 227) ottenere la sua soluzione, che abbassandola ad altra Equazione del quarto, oppure del terzo, ovvero del secondo grado. Supponghiamo per ora effettuato un simile abbassamento, e sia perciò la

(*XIV*)

(*XIV*) ridotta ad una delle tre Equazioni

$N^4 + pN^3 + qN^2 + rN + s = 0$,

(*XV*) $N^3 + pN^2 + qN + r = 0$,

$N^2 + pN + q = 0$.

In una qualunque di queste essendo il valor della N funzione della y', sarà essa sempre tale, che potremo col suo mezzo determinare non solo la (*XIV*), ma pel (N.° 147) potremo determinare eziandio i valori del coefficiente M nella $Z^5 - M = 0$. Ora pei (1.°, 2.°, 3.° N.° 280) la determinazione, o l' esistenza di una tale Equazione è sempre impossibile. Dunque sarà anche impossibile, che possiamo dalla y' ritrarre un' Equazione (*XIV*), come l' abbiamo supposta.

Supponghiamo in secondo luogo, che P abbia dipendenti dalla y' più valori. Se questo coefficiente si vuole, che abbia un numero di valori < 5, allora replicando sull' Equazione in P corrispondente quanto si è detto sin della (*XV*), verremo alla conclusione medesima.

Che se l' Equazione in P è di un grado < 4, concluderemo lo stesso, applicando il discorso medesimo sù della trasformata necessaria a farsi, onde avere il valore della P. Dunque ec.

283. Che se la Trasformata del (N.° 280) si volesse del quinto, o del primo grado, allora onde sciogliere il nostro problema, converrebbe evidentemente nel 1.° caso abbassare essa Trasformata ad altra di grado inferiore (N.i 227, 277); e nel secondo non potendosi dal valore della y

rica-

ricavare immediatamente quello della M nella $Z^5 - M = 0$ (N.[i] 278, 280), converrebbe innalzare tal Trasformata ad altra di grado > 1, che io sapessi risolvere, e dalle radici della quale potessi dedurre il valore della M. Ora, per quanto si è dimostrato nei (N.[i] 280, 281, 282), sappiamo, che tanto nell' uno, che nell' altro di questi casi una Trasformata di grado > 1, e < 5 opportuna all' intento non è determinabile. Dunque il Problema del (N.° 280) non sarà risolubile neppure col mezzo della Trasformata, che ci siamo ora proposte.

284. In ciascuno dei risultati della (Tav. *VI*) immaginiamoci, che venga aggiunta la x^{VI}; supponghiamo in seguito, che sopra tutti i 120 valori, che ne provengono, si eseguisca, come nei (N.° 268), e si replichi, quanto si può, la permutazione di $f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI})$ in $f(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI})(x')$.
In tal modo è chiaro, che tutte otterremo le $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ permutazioni della $y = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI})$.

285. Volendo trasformare l' Equazione generale del sesto grado

(R) $x^6 + A x^5 + B x^4 + C x^3 + D x^2 + E x + F = 0$

in un' Equazione di un grado < 5; questa non potrà essere, che del primo, o del secondo grado.

Chiamata y l' incognita della Trasformata, vedesi in primo luogo, che pel nostro intento i 720 valori della $y = f(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{VI})$ devo-

devono essere uguali fra loro per due permutazioni semplici entrambe del *primo genere*, l' una fra cinque, e l' altra fra sei radici. Per la seconda di queste permutazioni, qualunque essa siasi, i 720 valori della y si ridurranno immediatamente ai 120 della (Tav. *VI*), ma questi per la permutazion prima, che pel (N.° 269) posso sempre supporre espressa dall' Equazione (*VII*), riduconsi ai soli 24 della prima colonna. Dunque, acciocchè la nostra Trasformata sia di un grado < 5, converrà, che questi 24 valori siano tra loro uguali a 6 a 6, o ad 8 ad 8, o a 12 a 12, o tutti insieme. Ora qualunque uguaglianza esiste fra due, o più degli accennati 24 valori opportuna al caso, combinando questa colle due precedenti sempre risultano questi 24 valori, o uguali tutti insieme, o uguali fra loro a 12 a 12 (N.° 271). Dunque la y non potrà avere, che uno, o due valori diversi, e però ec.

286. Supposta Z radice della $Z^6 - M = 0$, e funzione delle x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, x^{VI}, la M non potrà avere nè tre, nè quattro soli valori differenti fra loro; imperciocchè, se ciò fosse, esisterebbe contro del (N.° 285) una Trasformata della (R) di un grado terzo, oppur quarto. Essa M non può avere neppure, o un solo, o due soli valori disuguali: perchè altrimenti in amendue questi casi divenendo la Z una funzione tale, che dovrebbe non cambiar di valore ad una permutazione composta di una semplice del *primo ge-*

nere

nere fra cinque radici, e di un' altra semplice nel primo caso fra le due x', x'', nel secondo fra le tre x', x'', x''' (N.° 271), replicato prima un discorso simile a quello dei (1.° 2.° N.° 273) su del risultato 2.° nel primo caso, su del 4.° nel secondo, e replicato in seguito il raziocinio del (N.° 277), ne verrebbe $Z' = Z'' = Z''' = Z^{iv} = Z^{v} = Z^{vi}$ contro del (N.° 199).

287. Cercasi, se è possibile la soluzione della (R) dipendentemente dalla Trasformata $y^2 + my + n = 0$ (N.° 285).

O vorremo dalle due radici y', y'' dedurre immediatamente le x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, x^{vi}, cioè le tre prime dalla y', le altre tre dalla y''; oppure vorremo dedurle mediatamente, ricavando prima dalle stesse y', y'' il valore del coefficiente M nella $Z^6 - M = 0$, od il valore dei coefficienti in altra Equazione, di cui conoscasi la soluzione, e dalle radici della quale sappiansi dedurre le radici della (R). Ma nel primo caso non essendovi ragione, per cui da una delle y', y'', per esempio dalla y' dipendano piuttosto tre delle x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, x^{vi}, che tre altre; nel secondo in conseguenza del (N.° prec.) avendo luogo i raziocinii dei (N.i 280, 281, 282), e perciò non potendosi dipendentemente dalle y', y'' ottenere il valore della M, nè quello di altri coefficienti opportuni: ne viene, che dalle supposte radici della Trasformata non potremo nè mediatamente, nè immediatamente ottenere il valore delle radici della (R), e però ec.

288. Se la Trasformata in y si volesse del primo, ovvero del quinto, o del sesto grado; troveremmo allor pure, come nel (N.° 283), essere col suo mezzo impossibile la soluzione della (R).

289. Proposta un' Equazion generale del settimo, o dell' ottavo, ec. grado, è facile avvedersi, che su di esso si applica sempre, e nella maniera medesima, quanto è stato detto, e concluso nei (N.i 280, 281, 282, 283, 285, 286, 287, 288).

290. La soluzione algebraica di un' Equazion generale di un grado qualunque maggiore del quarto è impossibile.

Questo Teorema non è che una chiara conseguenza dei (N.i 277, 241, 255, 276, 280, 283, 285, 287, 288, 289).

291. E' vero essere impossibile in generale la soluzione delle Equazioni di grado >4 (N.° prec.); ma non è questo già vero in varj casi particolari. I precedenti discorsi suppongono essenzialmente, che le x', x'', x''', ec. abbiano un valore qualunque, e prescindono totalmente da qualsivoglia rapporto particolare fra loro. Ma se alcuni dei valori della $y = f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(m)})$ sono fra loro uguali non per la forma della funzione, ma per un valore particolare, o per un particolare rapporto delle x', x'', x''', ec. (N.° 95); in allora non avranno più luogo neppure i raziocinii dei (N.i prec.i), e potrà perciò darsi benissimo, che la data sia risolubile. Inoltre quantunque

Pag. 290.

(VI)

1.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})$,
2.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})$,
3.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{v})$,
4.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})$,
5.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})$,
6.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{v})$,
7.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{v})$,
8.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})$,
9.° $f(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})$,
10.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{v})$,
11.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})$,
12.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})$,
13.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{v})$,
14.° $f(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})$,
15.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})$,
16.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})$,
17.° $f(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})$,
18.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})$,
19.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{v})$,
20.° $f(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})$,
21.° $f(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})$,
22.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})$,
23.° $f(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})$,
24.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})$,
25.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime})$,
26.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime})$,
27.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime})$,
28.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})$,
29.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime})$,
30.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})$,
31.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})$,
32.° $f(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})$,
33.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})$,
34.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})$,
35.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})$,
36.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})$,
37.° $f(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})$,
38.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})$,
39.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})(x^{iv})$,
40.° $f(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})$,
41.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})$,
42.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})$,
43.° $f(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})$,
44.° $f(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})$,
45.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})$,
46.° $f(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})$,
47.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})$,
48.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})(x^{iv})$,
49.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})$,
50.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})$,
51.° $f(x^{\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
52.° $f(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})$,
53.° $f(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
54.° $f(x^{\prime})(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})$,
55.° $f(x^{iv})(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
56.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})$,
57.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime})$,
58.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
59.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})$,
60.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime})$,
61.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})$,
62.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})(x^{iv})$,
63.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime})$,
64.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})$,
65.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{iv})$,
66.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})$,
67.° $f(x^{iv})(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})$,
68.° $f(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{iv})$,
69.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime})$,
70.° $f(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})$,
71.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})(x^{iv})$,
72.° $f(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})$,
73.° $f(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
74.° $f(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
75.° $f(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})$,
76.° $f(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})$,
77.° $f(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})$,
78.° $f(x^{iv})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})$,
79.° $f(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})$,
80.° $f(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})$,
81.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})$,
82.° $f(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})$,
83.° $f(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})$,
84.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})$,
85.° $f(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})$,
86.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})$,
87.° $f(x^{\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
88.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})$,
89.° $f(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})$,
90.° $f(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})$,
91.° $f(x^{\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})$,
92.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})$,
93.° $f(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
94.° $f(x^{\prime\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})$,
95.° $f(x^{\prime\prime})(x^{v})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})$,
96.° $f(x^{\prime})(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})$,
97.° $f(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})$,
98.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})$,
99.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})$,
100.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})$,
101.° $f(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})$,
102.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})$,
103.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})$,
104.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})$,
105.° $f(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
106.° $f(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})$,
107.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})$,
108.° $f(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
109.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})$,
110.° $f(x^{v})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
111.° $f(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})$,
112.° $f(x^{v})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})$,
113.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})$,
114.° $f(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime})(x^{\prime\prime})$,
115.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})$,
116.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})$,
117.° $f(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})$,
118.° $f(x^{v})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})$,
119.° $f(x^{v})(x^{\prime})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})$,
120.° $f(x^{v})(x^{iv})(x^{\prime\prime\prime})(x^{\prime\prime})(x^{\prime})$,

que sia impossibile l' esatta soluzion generale della nostra Equazione, pure potremo sempre aver questa per approssimazione, accostandoci ai veri valori delle radici quanto vogliamo.

Nei Capi, che seguono, considereremo primo i principali casi particolari, in cui le Equazioni ammettono soluzione esatta; secondo esporremo il metodo, onde avere per approssimazione in qualunque caso la soluzion della data.

CAPO DECIMOQUARTO.

Del modo di ritrovare i Fattori razionali di una data Equazione algebraica determinata.

292. Un' Equazione algebraica determinata priva del coefficiente del primo termine, e avente tutti gli altri coefficienti interi, e razionali non potrà avere giammai per radice una frazione razionale.

D) Siano nella $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} +$ ec. $+ V = 0$ tutti i coefficienti A, B, C, ec. tanti numeri interi, e razionali, e sia, se è possibile, radice di questa Equazione la frazione razionale $\frac{p}{q}$, che supporremo ridotta ai minimi termini; sostituita invece della x questa quantità, dovrà essere

$\frac{p^m}{q^m} + \frac{A p^{m-1}}{q^{m-1}} + \frac{B p^{m-2}}{q^{m-2}} +$ ec. $= 0$, è quindi moltiplicando tutta l' Equazione per q^{m-1}, e trasportando; avremo

$$\frac{p^m}{q} = -(A p^{m-1} + B p^{m-2} q + C p^{m-3} q^2 + \text{ec.}).$$

Ma questo è un assurdo, poichè, se ciò fosse, ne verrebbe un rotto uguale ad un intero. Dunque ec.

293. Se sia α radice razionale della precedente (D), dovrà essere $\frac{V}{\alpha}$ un numero intero, e razionale.

Essendo la V uguale al prodotto di tutte le radici della (D) preso col proprio segno, o col segno contrario, sarà esso divisibile esattamente per α; ma essendo α un numero razionale, esser deve anche intero (N.° prec.). Dunque tale dovrà essere anche il quoto $\frac{V}{\alpha}$.

(C) 294. Proposta la $F x^m + G x^{m-1} + H x^{m-2} +$ ec. $= 0$, in cui i coefficienti F, G, H siano tutti numeri interi, e razionali, determinare, se essa abbia delle radici razionali, e quali queste siano.

Fatto $x = \frac{z}{F}$, riducasi pel (N.° 85) la nostra (C) all' altra $z^m + A z^{m-1} + B z^{m-2} +$ ec. $+ V = 0$, in cui il coefficiente del primo termine sia l' unità, e gli altri A, B, ec., V siano tutti numeri interi: in seguito si cerchino tutti i fattori razionali

nali dell' ultimo termine V della Trasformata; questi presi sì positivi, che negativi sostituiscansi successivamente in luogo della z, e veggasi fra essi quali sono quei, che fanno verificare simile Equazione: supposto che α, β, γ, ec. siano i fattori della V, che soddisfanno a tal condizione, essi saranno già tutte le radici razionali dell' Equazione in z (N.° prec.); ma abbiamo $x = \frac{Z}{F}$; dunque $\frac{\alpha}{F}$, $\frac{\beta}{F}$, $\frac{\gamma}{F}$, ec. saranno tutte le radici razionali della data (C). Che se nessuno dei fattori della V rende $z^m + A z^{m-1} + B z^{m-2} +$ ec. uguale allo zero, tale Equazione, e perciò l' Equazion data non potrà in tal caso avere alcuna radice razionale (N.° 292).

Se sia $F = 1$, per la soluzione del nostro Problema basterà ritrovare tutti i fattori dell' ultimo termine della data (C), sostituire questi in luogo della x, e quelli fra essi, che renderanno la (C) $= 0$, saran le radici richieste.

Sia per esempio $6x^3 - 23x^2 + 25x - 6 = 0$ l' Equazione data. Suppongo $x = \frac{z}{6}$, sostituisco, e risultami l' Equazione $z^3 - 23z^2 + 150z - 216 = 0$; pongo successivamente in luogo della z i fattori del 216. Ora fra questi trovo, che i tre 2, 9, 12 fanno verificare l' Equazione in z: dunque le radici della data saranno $\frac{z}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

$\frac{z}{6} =$

$\frac{z}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, $\frac{z}{6} = \frac{12}{6} = 2$.

295. Abbiasi l' Equazione di quarto grado
(*I*) $x^4 + A x^3 + B x^2 + C x + V = 0$ avente i coefficienti tutti numeri interi, e sia α una delle sue radici razionali. Essendo sì α, che $\frac{V}{\alpha} = a$ numeri interi (N.[i] 292, 293), pongasi $\frac{V}{\alpha} = a$, e si sostituisca nella (*I*) α in luogo della x, ed αa in luogo di V; avremo perciò $\alpha^4 + A \alpha^3 + B \alpha^2 + C\alpha + a\alpha = 0$ e quindi dividendo per α, $\alpha^3 + A \alpha^2 + B \alpha + C + a = 0$, ossia $C + a = -(\alpha^3 + A \alpha^2 + 2 \alpha)$. Dividasi di nuovo questo risultato per α, ne verrà $\frac{C + a}{\alpha} = -(\alpha^2 + A \alpha + B)$; ora il secondo membro di questa Equazione è un numero intero; dunque tale dovrà essere anche il primo, e però $C + a$ sarà divisibile esattamenco per α. Suppongo pertanto $\frac{C + a}{\alpha} = b$, sostituiste, b avremo $b = -(\alpha^2 + A\alpha + B)$, ovvero $B + e = -(\alpha^2 + A \alpha)$, e dividendo per α, $\frac{B + b}{\alpha} = -(\alpha + A)$: in questo ultimo risultato $\alpha + A$ è un numero intero, tale dovendo adunque essere anche $\frac{B + b}{\alpha}$, la quantità $B + b$ dovrà risultare divisibile esattamente per α; supposto perciò

ciò $\frac{B+b}{\alpha}=c$, sostituendo otterremo $c=-(\alpha+A)$, e finalmente $\frac{A+c}{\alpha}=1$.

Da tutto questo si vede, che se α è radice razionale della (I), dovrà essa dividere esattamente non solo l' ultimo termine V, ma ancora le quantità $C+a$, $B+b$, $A+c$, essendo, a, b, c, -1 tutti i successivi quoti, che risultano da simili divisioni. Ora questo discorso si applica egualmente ad un' Equazione qualunque. Dunque in generale essendo α radice razionale della $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Rx^3+Sx^2+Tx+V=0$, ritenuto che sia $\frac{V}{\alpha}=a$, $\frac{T+a}{\alpha}=b$, $\frac{S+b}{\alpha}=c$, $\frac{R+c}{\alpha}=d$ ec., tutte queste quantità a, b, c, d, ec. saranno tanti numeri interi, e però α dividerà esattamente l' ultimo termine V, la somma del quoto a col coefficiente T del penultimo termine, il risultato, che si à unendo insieme il quoziente b, e il coefficiente S del termine antepenultimo, e così di seguito; onde in generale α dovrà essere un divisore esatto di ciascun coefficiente della data sommato col quoto della division precedente instituita nella esposta maniera, e il quoto finalmente dell' ultima divisione dovrà essere $=-1$.

Se l' Equazione data sia la (C), ed α sia sua radice intera, e razionale, tutte si verificheranno le di-le divisioni ora accennate, e dall' ultima soltanto invece di ottenere il quoto -1 otterremo l' altro $-F$.

296. Un metodo quindi si deduce elegante, e spedito, onde determinare quei numeri, che servono di radici razionali alla data Equazione.

Se i fattori dell' ultimo termine non sono molti, nè molto elevati di valore, servendoci della strada del (N.° 294), potremo, sostituendo ciascun d' essi in luogo della incognita, osservare, quali sono quelli, che fanno verificare la Equazione, e così trovare le radici cercate: ma se tali fattori sono molti, e molto elevati, riuscendo allora questo metodo di sostituzione incomodo troppo, e troppo prolisso, si suol piuttosto far ricorso al seguente.

Determinati tutti i fattori dell' ultimo termine, scrivansi questi in una riga sotto l' Equazione data, prendendoli sì positivamente, che negativamente; dividasi in seguito per ciascuno di essi l' ultimo termine, e i quoti, che ne provengono, scrivansi in una seconda fila, e questi poi sommati col coefficiente del penultimo termine, si pongano in una terza sotto i divisori corrispondenti. Ciascuno di questi risultati dividasi allora per quel fattore, che gli appartiene; se la divisione non riesce esatta, segno si è, che un tal fattore non può essere radice della data (N.° 295), e perciò si trascura, scrivendosi poi i quoti, che provengono esatti in una quarta riga in corrispondenza dei proprii divisori: posti inoltre in una quinta i risul-

risultati, che si ànno, unendo questi quozienti col coefficiente del termine antepenultimo, dividansi essi nel modo medesimo pei fattori corrispondenti, e trascurati quelli tra questi fattori, che producono una divisione inesatta, scrivansi nel modo istesso di prima in una sesta riga i quozienti, che riescono esatti, e ciò per proseguire, come precedentemente, la operazione, la quale si continui sempre in egual maniera, finchè si giunga al coefficiente del secondo termine, e in allora quei quozienti, che risulteranno $= -1$, se l' Equazione data sia la (D), ed $= -F$, se la data sia la (C), dimostreranno, che i divisori corrispondenti sono altrettante radici intere della (C), e razionali della (D) (N.° 295), e fuor di queste la nostra Equazione non ne potrà aver altre.

297. Vogliansi per esempio tutte le radici razionali della $x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 3x - 9 = 0$.

Ritrovati tutti i fattori del 9, li scrivo sotto dell' Equazione data in (II), prendendoli sì positivamente, che negativamente; ciò fatto divido il termine 9 per ciascheduno di questi fattori; e dispongo i quoti $-9, -3, -1$, ec. in una seconda riga in corrispondenza de' proprii divisori. Sommo in seguito ciascuno di questi coefficienti col coefficiente 3 del penultimo termine, e scritti i risultati $-6, 0, 2$, ec. in una terza riga, li divido pei fattori corrispondenti, onde avere i quozienti $-6, 0$, ec., che pongo in una quarta fila; quivi vedendosi, che i numeri $2, 4$ non so-

 no di-no divisibili pei fattori corrispondenti 9, -9, concludo, che tali fattori non ponno esser radici della data, e perciò li trascuro. Seguendo a tener conto degli altri, unisco i numeri -6, 0, ec. col coefficiente 12 dell' antepenultimo termine; colloco i risultati 6, 12, ec. in una quinta fila; divido questi pei fattori corrispondenti, e trascurato il 10, la cui divisione per 3 è inesatta, pongo in una sesta riga i quoti 6, 4, ec.: aggiunto a ciascuno di questi il coefficiente -4 del termine $-4x^2$, colloco in una settima i numeri 2, 0, ec., che ne risultano; instituisco su questi ultimi la solita divisione; ai quozienti 2, 0, ec., che provengono, e che scrivo in una ottava fila, unisco il coefficiente -3 del secondo termine; divido i risultati -1, -3, ec. già scritti in una nona riga pei rispettivi fattori, e veggendo finalmente, che dalla divisione dei tre fattori 1, 3, -1 risulta il quoziente, concludo pel (N.° 295), che questi fattori sono tutti e tre radici razionali della data.

$$x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 3x - 9 = 0$$

	1,	3,	9,	-1,	-3,	-9
	-9,	-3,	-1,	9,	3,	1
	-6,	0,	2,	12,	6,	4
	-6,	0,	*	-12,	-2,	*
(*II*)	6,	12,		0,	10,	
	6,	4,		0,	*	
	2,	0,		-4,		
	2,	0,		4,		
	-1,	-3,		1,		
	-1,	-1,		-1,		

298.

298. Determinate pei (N.[i] prec.) le radici razionali della data (C), (D), chiamate queste α, β, γ, ec, e sottratte dalla x, i binomj $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, ec., che ne risultano, non saranno, che i fattori razionali della data Equazione.

299. Trovare i fattori razionali di secondo grado della data Equazione.

Dividasi il primo membro della nostra Equazione per un fattore di secondo grado x^2+ax+b, i cui coefficienti a, b siano indeterminati. Eseguendo simile operazione, è chiaro, che giungeremo finalmente ad un residuo, in cui la x non monterà, che al primo grado, e sarà esso della forma $Mx+N$, essendo M, N funzioni delle a, b. Se questo residuo indipendentemente dalla x sia uguale allo zero, in allora sarà x^2+ax+b un fattore esatto del supposto primo membro, e lo dividerà quindi esattamente, ogniqualvolta le quantità a, b vengano determinate per modo, che abbiasi $M=0$, $N=0$. Sia il nostro fattore razionale, e siano perciò razionali i due coefficienti a, b; affine di determinarli formo le due Equazioni $M=0$, $N=0$; elimino da queste la b; cerco da quella, che nasce, i valori razionali di a (N.[i] 294, 296); sostituisco questi già ottenuti in una delle due $M=0$, $N=0$, onde avere nella stessa maniera i corrispondenti valori razionali di b; e sì gli uni, che gli altri sostituiti opportunamente nella supposta quantità x^2+ax+b tutti ci daranno i fattori razionali di secondo grado richiesti.

300.

300. Data sia ad esempio l' Equazione $x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x - 36 = 0$. Instituita la divisione di questa pel trinomio $x^2 + ax + b$, e giunti al residuo $(2ab + b - 3 + 9a - a^2 - a^3)x + (b^2 + 9b - a^2 b - ab - 36)$, dovendo questo essere uguale allo zero indipendentemente dalla x, suppongo $2ab + b - 3 + 9a - a^2 - a^3 = 0$, $b^2 + 9b - a^2 b - ab - 36 = 0$. Dalla prima di queste Equazioni avremo $b = \frac{a^3 + a^2 - 9a + 3}{2a + 1}$, e dalla seconda $b^2 - (a^2 + a - 9)b - 36 = 0$, ovvero facendo per semplicità $a^2 + a - 9 = p$, avremo $b = \frac{ap + 3}{2a + 1}$, $b^2 - pb - 36 = 0$: sciolgo l' ultima di queste Equazioni; avuto il valore $b = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + 36\right)}$, formo l' Equazione $\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + 36\right)} = \frac{ap + 3}{4a + 1}$; tolgo da questa le frazioni, e i radicali; sostituisco in luogo della p il suo valore, e otterrò finalmente l' Equazione $a^6 + 3a^5 - 15a^4 - 35a^3 + 201a^2 + 228a = 0$. Ora da questa col metodo dei (N.[i] 294, 296) ritrovo, che la a à i due valori razionali 0, -1, e questi sostituiti nella $b = \frac{a^3 + a^2 - 9a + 3}{2a + 1}$ ci danno corrispondentemente $b = 3$, $b = -12$. Dunque riposti successivamente nel fattore $x^2 + ax + b$ i numeri 0, -1 in luogo della a, e i numeri 3, -12 in luogo della b otterremo le due quantità

$x^2 +$

$x^2 + 3$, $x^2 - x - 12$, le quali saranno due fattori esatti razionali della data.

301. Determinare i fattori razionali di terzo grado della data (D).

Si divida il primo membro della (D) pel quadrinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$, i cui coefficienti a, b, c siano da determinarsi; il residuo della divisione sarà della forma $Mx^2 + Nx + P$, e se questo indipendentemente dalla x si ridurrà allo zero, il supposto quadrinomio sarà un fattore esatto di terzo grado, fattor razionale, mentre siano razionali i coefficienti a, b, c. Supponghiamo $M = o$, $N = o$, $P = o$, col mezzo della eliminazione riducansi queste tre Equazioni ad una, in cui non esista che la sola a; ottenuti da questa mediante i (N.[i] 294, 296) i valori razionali di essa a, sostituiscansi successivamente nelle altre, onde abbiansi, come nel (N.° prec.), i valori corrispondenti di b, e di c; se questi si trovano razionali, come razionali si sono supposti i valori della a, la (D) avrà altrettanti fattori razionali di terzo grado, e gli avremo con questo metodo determinati.

302. La strada tenuta presentemente è affatto la stessa, che quella del (N.° 299) per la ricerca dei fattori razionali di secondo grado, e questa medesima deve egualmente tenersi nella determinazione dei fattori razionali del quarto, del quinto, ec. grado: supponendo difatti uguale allo zero ciascuno dei coefficienti del residuo, vedesi, che

che avremo tante Equazioni, quanti sono i coefficienti indeterminati del supposto fattore, ed operando perciò, come precedentemente, determineremo, mentre esistono, i valori commensurabili di tali coefficienti.

303. Sonovi dei casi particolari, ne' quali il metodo, onde determinare i fattori razionali, riesce molto più semplice del metodo generale considerato fin ora: tali sono quelle Equazioni, che andremo considerando presentemente.

304. Ridotta, come nei (N.^{i} 60, 62), la (D) alla $mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3}$ $+$ ec. $= 0$, se la prima di queste Equazioni à un numero p di radici $= \alpha$, la seconda avrà un numero $p - 1$ di simili radici $= \alpha$.

Supposte uguali fra loro le p radici α, β, γ, δ, ec. π, poichè pel (N.° 60) abbiamo
$m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3}$ ec.
$= (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) \ldots$, poichè i fattori $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$, $\alpha - \delta$ ec. $\alpha - \pi$ sono evidentemente di numero $p - 1$, e poichè nella nostra ipotesi per ciascuno di questi fattori la quantità
$m\alpha^{m-1} + (m-1)A\alpha^{m-2} + (m-2)B\alpha^{m-3} +$ ec.
diventa $=$ zero; quindi ne segue chiaramente, che la $mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3}$ $+$ ec. $= 0$ avrà un numero $p - 1$ di radici $= \alpha$.

305. Se la (D) non à che una sola radice $= \alpha$, la $mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3}$ $+$ ec. $= 0$ non ne avrà veruna $= \alpha$.

306. Supposte nuovamente le quantità α, β,

γ,

γ, δ, ec. differenti tra loro, se la (D) à un numero p di radici $= \alpha$, un numero q di radici $= \beta$, un numero r di radici $= \gamma$, ec. ed à le radici ϱ, σ, τ, ec. replicate una volta sola, sarà essa spezzabile in tre fattori razionali, il primo dei quali sarà $= (x - \alpha)^{p-1} (x - \beta)^{q-1} (x - \gamma)^{r-1} \ldots$, il secondo $= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots$, e il terzo $= (x - \varrho)(x - \sigma)(x - \tau) \ldots$

Ridotta la (D) alla
$m x^{m-1} + (m - 1) A x^{m-2} + (m - 2) B x^{m-3} +$ ec. $= 0$, questa ultima Equazione non avendo alcuna radice uguale alla quantità ϱ, σ, τ, ec., ne avrà un numero $p - 1$ uguali ad α, $q - 1$ uguali alla β, $r - 1$ uguali alla γ, ec.: dunque se troveremo il massimo comun divisore tra i due primi membri $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} +$ ec.,
$m x^{m-1} + (m - 1) A x^{m-2} + (m - 2) B x^{m-3} +$ ec.
sarà esso $= (x - \alpha)^{p-1} (x - \beta)^{q-1} (x - \gamma)^{r-1} \ldots$, e se per questo divideremo il primo membro
$x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} +$ ec., il quoto, che ne viene, conterrà tutte le radici α, β, γ, ec., ϱ, σ, τ, ec. replicate ciascuna una volta sola. Supponghiamo $(x - \alpha)^{p-1} (x - \beta)^{q-1} (x - \gamma)^{r-1} \ldots$ $= X$, $\dfrac{x^m + A x^{m-1} + \text{ec.}}{X} = X'$, e cerchisi il massimo comun divisore tra le due quantità X, X'; chiamato questo X''; poichè abbiamo
$X' = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma \ldots (x - \varrho)(x - \sigma)(x - \tau)$ ec., sarà $X'' = (x - \alpha)(x - \gamma)(x - \delta) \ldots$, e

sup-

supposto finalmente $\frac{X'}{X''} = X'''$, otterremo $X''' = (x-\varrho)(x-\sigma)(x-\tau)\ldots$ Ora le tre quantità X, X'', X''' essendosi ricavate dalle $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ ec., $mx^{m-1} + (m-1)$ $Ax^{m-2} +$ ec. con tante successive divisioni, non ponno che essere razionali, e inoltre il loro prodotto X X'' X''' risulta $= (x-\alpha)^p (x-\beta)^q (x-\gamma)^r \ldots (x-\varrho)(x-\sigma)(x-\tau)\ldots = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ ec. Dunque ec.

307. Dunque se la data (D) contiene delle radici uguali, potrà sempre spezzarsi nei tre fattori razionali X, X'', X''' con le semplici divisioni (N.° prec.) e perciò in un modo molto più semplice dell' accennato nei (N.i 298, 299, 301, 302). Inoltre se sapremo risolvere le Equazioni $X'' = 0$, $X''' = 0$, la prima di esse ci darà le radici uguali, e la seconda le disuguali della proposta (D).

308. Sia $x^6 - 4x^5 + 8x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 24x - 18 = 0$ l' Equazione proposta, in cui vogliasi determinare, se abbianvi delle radici eguali, e quali esse siano; ridotta perciò tale Equazione all' altra $6x^5 - 20x^4 + 32x^3 - 22x + 24 = 0$, cerco tra i loro primi membri il massimo comune divisore: ora colla nota operazione troviamo esser questo $x^2 - 2x + 3$, quantità corrispondente alla X del (N.° 306); dunque diremo, che la data à benissimo delle radici uguali, e però diviso il suo primo membro per X, avremo il quoto x^4

to $x^4 - 2x^3 + x^2 + 4 - 6 = X$ (N.° 306) Cerco nuovamente il massimo divisor comune fra le quantità X, X', e trovandosi esser questo $x^2 - 2x + 3 = x''$, formo, e sciolgo l' Equazione $x^2 - 2x + 3 = 0$; ma da questa abbiamo i due valori $x = 1 + \sqrt{-2}$, $x = 1 - \sqrt{-2}$; dunque, giacchè il prodotto X X'' ascende al quarto grado, vedesi pel (cit.° N.° 306), che la data dovrà avere due radici $= 1 + \sqrt{-2}$, ed altre due $= 1 - \sqrt{-2}$. Affine poi di determinare le radici disuguali, divido X' per X''; e poichè ne risulta il quoto $x^2 - 2 = X'''$, tali radici disuguali saranno le due $+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$. Da tutto questo finalmente apparisce essere stato il primo membro della proposta spezzato nei tre fattori razionali $X = x^2 - 2x + 3$, $X'' = x^2 - 2x + 3$, $X''' = x^2 - 2$.

309. Abbiano le due quantità intere, e razionali A, B il massimo comun divisore K; se moltiplicheremo una di queste, per esempio la B per un numero p primo all' altra A, e in seguito se ne faremo la somma, il risultato $A + pB$, avrà con ciascuna delle A, B lo stesso massimo divisor comune K.

Che il numero K sia divisor comune delle quantità $A + pB$, A, B, ciò è evidente; che poi sia divisor massimo fra due qualunque di tali quantità, lo conosceremo facilmente dall' osservare, che, se ciò si negasse, e si volesse una quantità $f > K$ divisor comune di $A + pB$, e di A, cosicchè si avesse $A + pB = fr$, $A = fs$ sostituentuendo ne verrebbe $fs + pB = fr$, e perciò $pB = f(r - s)$; ma il numero p essendo primo ad A, deve esser primo anche ad f; dunque essendo la quantità $pB = f(r-s)$ divisibile esattamente per f, non potrà per questa f essere divisibile, che la B; e perciò le due quantità A, B avrebbero per loro massima misura comune non più K, ma $f > K$; il che è contro la supposizione. Con più semplice raziocinio si vede ancora essere la K divisor comune più grande delle quantità $A + pB$, B.

310. Se tre, quattro, ec. fossero le quantità intere, e razionali A, B, C, ec. aventi K per loro massimo comune divisore, e la seconda di esse si moltiplicasse per un numero p, la terza per un numero q, ec. tutti primi ad A; nel modo istesso si dimostra, che il medesimo numero K sarà massimo comun divisore delle quantità $A + pB + qC +$ ec. A, B, ec. insieme considerate, o a tre a tre, o a quattro a quattro, ec. secondo che tre, quattro, ec. erano le quantità date A, B, C ec.

311. Se nel (N.° 309) supponghiamo $p = 1$, od $= -1$, ne verranno i due risultati $A + B$, $A - B$, ciascuno di questi avrà pel (cit. N.° 309) con le quantità A, B lo stesso massimo divisor comune K.

2.° Supponendo nel (N.° prec.), che tre siano le quantità date, e che p ci esprima una qualunque delle radici cubiche dell' unità, e sia $q = p^2$

(N.°

(N.° 199), è chiaro, che nella ipotesi di A quantità razionale il risultato $A + pB + p^2 C$ avrà con due qualsivogliano delle A, B, C lo stesso K per massima comune misura.

3.° Se quattro siano le date A, B, C, D, se la prima fra loro sia razionale, e se i numeri p, p^2, p^3 tutte ci esprimano le radici quarte dell'unità (N.° 199); vedremo in egual modo pel (N.° 310), che K sarà il più grande divisor comune fra il risultato $A + pB + p^2 C + p^3 D$, e tre quali si vogliono delle quantità A, B, C, D. Lo stesso si dice nella supposizione, che cinque, sei ec.: siano le quantità date.

312. Supposto $A + B = a$, $A - B = b$, determinare il massimo comun divisore fra le due quantità a, b.

Il più grande divisor comune richiesto sarà lo stesso, che quello esistente fra le quantità a, $a + b$ (1.° N.° 311), ma essendo K la massima comune misura tra $A + B$, ed A (cit.° N.° 311), ed essendo $A + B = a$, $2A = a + b$, vedesi, che se $\frac{A + B}{K} = \frac{a}{K}$ risulta numero pari, allora il massimo comun divisore tra $A + B$, e $2A$, ossia tra a, ed $a + b$ diviene 2K, e resta lo stesso K, se $\frac{A + B}{K} = \frac{a}{K}$ risulta numero dispari. Dunque anche il massimo divisor comune tra a, e b sarà 2K, oppur K, secondo che $\frac{a}{K}$ uguaglia un numero pa-

pari, od un numero dispari.

313. Attribuito alla p (2.° N.° 311) il valore $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, determinare il più grande divisor comune fra le tre quantità $A+B+C$, $A+pB+p^2C$, $A+p^2B+p^4C$.

Prima di procedere a simile dimostrazione, osservo, che il massimo divisor comune fra le tre quantità A, $A+B+C$, $A+pB+p^2C$ esser deve lo stesso K esistente fra le tre A, B, C, e perciò fra le A, B, $A+B+C$ (N.° 310): e difatti se ciò si nega, volendosi per massima comune misura delle esposte tre quantità un numero $f>K$; supposto $A=fr$, $A+B+C=fs$, $A+pB+p^2C=ft$, con la eliminazione delle quantità A, C, otterremo $(p^2-p^4)B=f(p^2s-t+(1-p^2)r)$, onde si vede, che la quantità f dovrà dividere esattamente il prodotto $(p^2-p^4)B$; ma essendo $p^2-p^4=\pm\sqrt{-3}$, ed essendo f quantità razionale, perchè divisore esatto della quantità razionale A (N.° 310), non può eseguirsi una tal divisione, quando non sia divisibile esattamente per la f la quantità B. Dunque riescendo essa f divisore esatto di tutte e tre le quantità A, B, $A+B+C$, non sarebbe più loro massimo comun divisore la K contro della supposizione. Dunque ec.

Ciò posto, facciamo $A+B+C=a$, $A+pB+p^2C=b$, $A+p^2B+p^4C=c$, la massima comune misura fra le a, b, c la stessa sarà, che quella fra le $a+b+c$, a, b (N.° 310); ma essendo

$a+b$

$a+b+c=3A$, e per quanto si è ora detto, il massimo comun divisore delle quantità A, a, b essendo il numero K, è chiaro, che, se i risultati $\frac{a}{K}$, $\frac{b}{K}$ sono amendue multipli del 3, allora il massimo comun divisore delle $a+b+c=3A$, a, b diventa $3K$, e rimane il medesimo K, se $\frac{a}{K}$, $\frac{b}{K}$ non sono multipli del 3. Dunque eziandio le quantità a, b, c avranno per massimo comun divisore $3K$, ovvero K, secondo che sono, o nò, divisibili per 3 i risultati $\frac{a}{K}$, $\frac{b}{K}$.

314. Se dato alla p (3.° N.° 311) il valore $\sqrt[3]{-1}$ (N.° 218), pongasi $A+B+C+D=a$, $A+pB+p^2C+p^3D=b$, $A+p^2B+p^4C+p^6D=c$, $A+p^3B+p^6C+p^9D=d$, e si domandi in seguito il massimo comun divisore delle quantità a, b, c, d; con un raziocinio perfettamente simile a quello del (N.° prec.) troveremo esser questo $4K$, se i quoti $\frac{a}{K}$, $\frac{b}{K}$, $\frac{c}{K}$ riescono tutti multipli di 4; essere $2K$, se tali quoti divengono tutti multipli di 2; ed essere finalmente K, se essi medesimi non sono multipli nè del 4, nè del 2. In egual modo, se attribuiscasi alla p il valore di una delle radici quinte della unità diversa dall' unità medesima; e se supponghiamo

$A+B+C+D+E=a$,

$A+pB+p^2C+p^3D+p^4E=b$,

A +

$A + p^2 B + p^4 C + p^6 D + p^8 E = c$,
$A + p^3 B + p^6 C + p^9 D + p^{12} E = d$,
$A + p^4 B + p^8 C + p^{12} D + p^{16} E = e$, troveremo, che il massimo comun divisore delle quantità a, b, c, d, e sarà $\frac{K}{5}$, oppur K, secondo che i quozienti $\frac{a}{K}$, $\frac{b}{K}$, $\frac{c}{K}$, $\frac{d}{K}$ sono, o no divisibili esattamente per 5. Così dando alla p il valore di una di quelle radici seste dell' unità, che elevate alle successive potenze ci somministrano tutte le radici medesime (N.° 206), e chiamando a, b, c, d, e, f i risultati $A + B + C + D + E + F$, $A + pB + p^2 C + p^3 D + p^4 E + p^5 F$, ec., vedremo, che la loro massima misura comune deve essere $\frac{K}{6}$, ovvero $\frac{K}{3}$, oppure $\frac{K}{2}$, o semplicemente K, secondo che la quantità $\frac{a}{K}$, $\frac{b}{K}$, $\frac{c}{K}$, $\frac{d}{K}$, $\frac{e}{K}$ riescono multiple del 6, oppure del 3, oppure del 2, o finalmente di niuno di questi numeri. L' istesso diremo dei casi ulteriori.

315. Mentre la data (D) abbia delle radici uguali, e contrarie di segno, sarà essa sempre dotata di un fattor razionale, in cui tutte si conterranno simili radici.

Ponghiamo nella supposta (D) $-x$ in luogo di x; le radici dell' Equazione, che risulta, e che chiamerò E, altro non essendo, che quelle della data prese con segno contrario, ne viene, che se

la

la (D) à per radici le quantità $+\alpha$, $-\alpha$, $+\beta$, $-\beta$, $+\gamma$, $-\gamma$, ec. π, ϱ, ec.; la E avrà per radici le $-\alpha$, $+\alpha$, $-\beta$, $+\beta$, $-\gamma$, $+\gamma$, ec., $-\pi$, $-\varrho$, ec., e però sì l' una, che l' altra di queste Equazioni avranno un comun divisore, il quale sarà

$(x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta)(x+\beta)(x-\gamma)(x+\gamma)$ ..... $=(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)$.... Dunque se col noto metodo cercherò fra i primi membri delle (D), E la massima loro comune misura, essa uguaglierà il prodotto $(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)$ $(x^2-\gamma^2)$....; ma, per essere le (D), E razionali, questa loro massima comune misura non può che essere razionale. Dunque ec.

316. Supposta la (D), come nel (N.° prec.), determinare il suo fattore

$(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)$....

Avremo pel (N.° prec.) la soluzione di questo Problema, trovando attualmente il massimo comun divisore fra i primi membri delle (D), E. Affine però di facilitare l' operazione, chiamata M la somma di tutti i termini, che nella (D) ànno per esponente dei numeri pari, compreso il termine cognito, N x la somma di tutti i termini di esponente dispari, ne verrà $(D)=M+Nx$, ed è facile a vedersi che sarà $E=M-Nx$. Ciò posto, facciamo la somma, e la sottrazione di queste due quantità, e supponghiamo

$(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)\ldots\ldots=K$; i risultati $2M$, $2Nx$ essendo entrambi divisibili per 2,

e non

e non essendo divisibile per 2 la quantità K, pel (N.° 312) essi due risultati 2 M, 2 N x avranno il massimo comun divisore 2 K, e quindi K lo sarà dei due M, N x. Ciò dunque essendo, se nella data (D) raccoglierò da una parte tutti i termini di esponente pari, e dall' altra quelli tutti di esponente dispari, e se fra queste due somme troverò il più grande comun divisore, altro esso non sarà che il fattor domandato.

Sia per esempio (D) $= x^7 + 3x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 4x + 12 = 0$. Avendosi M $= 3x^6 - 9x^4 + 12$, N$x = x^7 - 3x^5 + 4x$, cerco il massimo divisor comune fra tali due quantità, e trovando esser questo $x^6 - 3x^4 + 4$, sarà esso il fattore, in cui tutte contengonsi le radici della (D) uguali fra loro, e contrarie di segno.

317. Se la data (D) contenga un fattore K $= (x^3 - \alpha^3)(x^3 - \beta^3)(x^3 - \gamma^3)\ldots$, sarà questo sempre razionale, e determinabile con un metodo più semplice dell' accennato nei (N.[i] 301, 302).

Chiamata nella (D) M la somma di tutti i termini, ne' quali la x à per esponenti dei numeri multipli di 3, compreso il termine cognito; chiamato N x l' aggregato di quei termini, ne' quali divisi per se l' incognita monta ad un grado multiplo di 3, e chiamata P x^2 la somma di tutti i termini, ne' quali la x è dotata di esponente multiplo di 3, mentre vengan divisi per x^2, riduciamo così la nostra Equazione all' espressione

M +

$M + N x + P x^2 = 0$, e sia quindi $M + N x + P x^2 = (x^3 - \alpha^3)(x^3 - \beta^3)(x^3 - \gamma^3) \ldots (x - \pi)(x - \rho) \ldots = K(x - \pi)(x - \rho) \ldots$. Ciò fatto, ponganasi successivamente in luogo della x le quantità $p x$, $p^2 x$, essendo p, p^2, 1 le tre radici cubiche della unità: per simile sostituzione restando affatto le stesse le quantità M, N, P, K, la precedente $M + N x + P x^2 = K(x - \pi)(x - \rho) \ldots$ si cambierà nelle

$$M + p N x + p^2 P x^2 = K(p x - \pi)(p x - \rho) \ldots,$$
$$M + p^2 N x + p^4 P x^2 = K(p^2 x - \pi)(p^2 x - \rho) \ldots,$$

e fra tutti e tre questi risultati vedesi, che esisterà come massimo comun divisore la quantità K. Ora sommiamo insieme per tre volte i tre primi membri $M + N x + P x^2$, $M + p N x + p^2 P x^2$, $M + p^2 N x + p^4 P x^2$, prendendoli prima semplicemente come si trovano, poscia moltiplicando il secondo per p^2, e il terzo per p^4, e finalmente moltiplicando il secondo per p, e il terzo per p^2; e otterremo con ciò i tre risultati $3M$, $3Nx$, $3Px^2$. Ma essendo essi moltiplicati per 3, e non essendo per 3 divisibile K, il loro massimo comun divisore viene ad essere $3K$ (N.° 313); dunque K lo sarà dei tre M, Nx, Px^2; ora queste tre quantità M, Nx, Px^2 sono razionali, tale dunque sarà anche K, e sarà esso determinabile col metodo di trovare il massimo comun divisore, metodo assai più semplice degl' accennati nei (N.i 301, 302).

318. Supposte in generale p, p^2, p^3, p^4 ec., p^{n-1}

p^{n-1} tutte le radici *nesime* della unità (N.[i] 199, 206), sia $K=(x^n-\alpha^n)(x^n-\beta^n)(x^n-\gamma^n)\ldots$, e sia la data $(D)=(x^n-\alpha^n)(x^n-\beta^n)(x^n-\gamma^n)\ldots(x-\pi)(x-\varrho)\ldots=K(x-\pi)(x-\varrho)\ldots=0$. Ridotta questa alla forma

$M+Nx+Px^2+Qx^3+\ldots Tx^{n-1}=0$, col supporre, che M rappresenti la somma di tutti i termini, nei quali la x sale ad un grado multiplo di n; che Nx esprima la somma di tutti i termini, che ànno l' esponente multiplo di n, mentre vengan divisi per x; che Px^2 sia l' aggregato di que' termini, che divisi per x^2 restano di esponente multiplo di n, e così di seguito; si scrivano successivamente in luogo della x le quantità px, p^2x, p^3x, ec. $p^{n-1}x$: restando perciò le medesime le quantità K, M, N, P, Q, ec., T, otterremo

$$M+Nx+Px^2+Qx^3+\ldots\ldots+Tx^{n-1}=K(x-\pi)(x-\varrho)\ldots\ldots$$

$$M+pNx+p^2Px^2+p^3Qx^3+\ldots\ldots+p^{n-1}Tx^{n-1}=K(x-\pi)(px-\varrho)\ldots\ldots$$

$$M+p^2Nx+p^4Px^2+p^6Qx^3+\ldots\ldots p^{2n-2}Tx^{n-1}=K(p^2x-\pi)(p^2x-\varrho)\ldots\ldots$$

$$M+p^3Nx+p^6Px^2+p^9Qx^3+\ldots\ldots p^{3n-3}Tx^{n-1}=K(p^3x-\pi)(p^3x-\varrho)\ldots\ldots,$$

ec. ec.

i quali tutti avranno il massimo comun divisore K. Sommiamoli ora per un numero n di volte, col prenderli primieramente nello stato, in cui si trovano; moltiplicando poscia il secondo risultato

per

per p^{n-1}, il terzo per p^{2n-2}, il quarto per p^{3n-3}, ec.; in terzo luogo moltiplicando il risultato secondo per p^{n-2}, il terzo per p^{2n-4}, il quarto per p^{3n-6}, ec.; moltiplicando in quarto luogo questi risultati successivi per p^{n-3}, p^{2n-6}, p^{3n-9}, ec.; e così in progresso. Coll' operare in tal modo è chiaro, che ne verranno i nuovi n risultati $n\mathrm{M}$, $n\mathrm{N}x$, $n\mathrm{P}x^2$, $n\mathrm{Q}x^3$, ec. $n\mathrm{T}x^{n-1}$, i quali essendo tutti divisibili per n, avranno per loro massima comune misura la quantità $n\mathrm{K}$ (N.° 314); e però K sarà massimo comun divisore delle quantità M, $\mathrm{N}x$, $\mathrm{P}x^2$, $\mathrm{Q}x^3$ ec. $\mathrm{T}x^{n-1}$; ma queste tutte sono razionali; dunque anche K sarà razionale, e sarà sempre determinabile col metodo di trovare il massimo comun divisore fra più quantità date: onde qualunque siasi la n, potremo dire, che avrà luogo sempre il teorema del (N.° 317).

319. Col metodo dei (N.ⁱ 316, 317, 318) vengonsi a determinare in una Equazione data i fattori razionali della forma $x^{bn} + a\,x^{(b-1)n} + b\,x^{(b-2)n} + c\,x^{(b-3)n} +$ ec. Imperciocchè supposte di numero b le quantità $x^n - \alpha^n$, $x^n - \beta^n$, $x^n - \gamma^n$, ec. dovrà essere il prodotto

$$\mathrm{K} = (x^n - \alpha^n)(x^n - \beta^n)(x^n - \gamma^n)\ldots$$
$$= x^{bn} + a\,x^{(b-1)n} + b\,x^{(b-2)n} + \text{ec.}\ldots$$

Nel (N.° 316), ove $n = 2$, resta determinato un fattore della forma $x^{2b} + a\,x^{2(b-1)} + b\,x^{3(b-2)} +$ ec.; e nel (N.° 317), ove $n = 3$, ne resta determinato un altro della forma $x^{3b} + a\,x^{3(b-1)} + b\,x^{3(b-2)} +$ ec.

Nell' Equazione $x^{15} - 2x^{12} + 3x^{11} - 6x^{8} - 2x^{7} + 4x^{4} + 3x^{3} - 6 = 0$, e servendoci del metodo accennato, troveremo il fattore $x^{12} + 3x^{8} - 2x^{4} + 3$, in cui sarà $n = 4$, $b = 3$.

CAPO DECIMOQUINTO.

Riflessioni generali intorno all' Equazioni algebraiche determinate riducibili ad altre di grado inferiore.

320. Abbiamo nel (N.° 291) accennato, che una data Equazione quantunque di grado > 4, può in varii casi particolari ammettere soluzione, quando cioè per valori, o per rapporti particolari fra alcune, o tutte le radici può essa ridursi ad altra di grado < 5, dalle radici della quale possansi poi ricavare le radici della proposta. Ora affine di scoprire, quali siano questi casi, andremo prima considerando nel Capo presente in generale i casi, nei quali una data Equazione è capace di abbassamento, indicandone insieme il metodo generale, onde ottenerlo. Nel Capo poi, che segue, esporremo alcune determinate Equazioni, le quali possonsi attualmente abbassare di grado con metodi particolari.

321. Supponghiamo pertanto la data (D) tale, che fra un numero λ di sue radici esista un certo

certo qualunque siasi rapporto particolare. Conosciutosi questo, o dalla forma della Equazione, o dalla natura del Problema, o in qualunque altra maniera: se cercheremo di esprimerlo, è chiaro, che ci condurrà ad un' Equazione fra le supposte λ radici, che potrò rappresentare con la (S)

(S) $f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)}) = K$, essendo K una quantità cognita, oppure zero.

Nel caso per esempio del (N.° 315) supposto $\alpha = x'$, $-\alpha = x''$, le due radici x', x'' ànno un tal rapporto particolare fra loro, che da esso risulta $x' + x'' = 0$: nel caso del (N.° 317) fatto $\alpha = x'$, $p\alpha = x''$, $p^2\alpha = x'''$, ne viene $x' + x'' + x''' = 0$.

322. Supposta la precedente Equazione (S) razionale, se la funzione $f(x')(x'')(x''')\ldots x^{(\lambda)}$ cangia sempre di valore a qualunque permutazione fra le sue radici: io dico, che in tale supposizione le radici x', x'', x''', ec. $x^{(\lambda)}$ dovranno tutte essere razionali.

A cagione delle condizioni supposte dipendentemente dal valore K già cognito (N.° prec.) potremo determinare pei (N.i 166, 164, 144) ciascuna delle x', x'', x''', ec., $x^{(\lambda)}$ col mezzo di tante Equazioni tutte di primo grado, e però razionalmente. Ma K per la ipotesi è quantità razionale. Dunque anche le nostre λ radici saranno tutte razionali. C. *d*. *d*.

323. Se le x', x'', x''', ec., $x^{(\lambda)}$ sono commensurabibili, tale sarà pur anche il prodotto

(x —

$(x - x')(x - x'')(x - x''') \ldots (x - x^{(\lambda)})$, che por-
(*I*) remo della forma $x^\lambda + a x^{\lambda-1} + b x^{\lambda-2} + c x^{\lambda-3}$ ec; e quindi la (D) avrà nella nostra ipotesi un fattor razionale del grado λ. Ma un simile fattore, allorchè esiste, è sempre determinabile (N.° 302), e se per esso già ritrovato dividasi il primo membro della (D), viene questa a ridursi al grado $m - \lambda$. Dunque nella ipotesi del (N.° prec.) sarà la (D) un' Equazione sempre riducibile a grado inferiore.

Nell' Equazione $x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 3x - 9 = 0$ supposta ad esempio nel (N.° 297), avendosi $\frac{x' - x'''}{x''} = \frac{2}{3}$, si sono ritrovati i tre fattori razionali $x - 1$, $x - 3$, $x + 1$, e però tale Equazione divisa pel prodotto $(x - 1(x - 3)(x + 1)$ riducesi alla $x^2 - 3 = 0$.

324. Se la nostra Equazione di relazione (S) sia tale, che resti la medesima pel cangiamento reciproco di due qualunque delle radici, per esempio di x' in x'', e varii alle altre permutazioni, cosicchè divenga della forma $f(x', x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}) = K$; in allora la determinazione delle x''', $x^{\prime}$, ec., $x^{(\lambda)}$ dipenderà, come nel caso precedente, da altrettante Equazioni razionali tutte del primo grado; ma la determinazione della x', x'' dipenderà da un' Equazion razionale del grado secondo (N.° 147), onde la (D) oltre i fattori razionali di primo grado $x - x'''$, $x - x^{\text{v}}$, ec. $x - x^{(\lambda)}$, un altro ne conterrà $x^2 + ax + b$ razionale, e del

gra-

grado secondo (cit. N.° 147).

Abbiasi per esempio la $x^6 - 4x^5 - x^4 + 13x^3 + 15x^2 - 4x + 10 = 0$, in cui d' altronde si sappia essere $x' + x'' - x''' = 7$. Poichè questa Equazione di relazione è della forma $f(x', x'')(x''') = 7$, la data dovrà aver due fattori razionali uno del primo, e l' altro del secondo grado; e di fatti cercati questi coi metodi dei (N.ⁱ 296, 299), li troveremo essere i due $x + 1$, $x^2 - 6x + 10$, dal primo dei quali ricavasi $x''' = -1$, dal secondo $x' = 3 + \sqrt{-1}$, $x'' = 3 - \sqrt{-1}$, e però $x' + x'' - x''' = 7$.

325. Sia la (S) della forma $f(x', x'', x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}) = K$, cosicchè mantenga lo stesso valore al cangiarsi fra loro delle x', x'', x'''. Dipendendo in questo caso la determinazione delle x', x'', x''' da un' Equazion razionale della forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (N.° 147); la (D) conterrà e i fattori razionali di primo grado $x - x^{IV}$, $x - x^{V}$, ec. $x^{(\lambda)}$, ed un altro ne conterrà di terzo.

2.° Se $f(x', x'', x''', x^{IV})(x^{V}) \ldots (x^{(\lambda)}) = K$ sia l' Equazione di relazione; la (D) oltre dei soliti fattori di primo, sarà dotata di un altro fattore razionale di quarto grado e così in progresso.

3.° Che se finalmente abbiamo la (S) della forma $f(x', x'', x''', x^{IV}, \ldots x^{(\lambda)}) = K$, le x', x'', x''', ec. $x^{(\lambda)}$ saranno tutte radici di una sola Equazione razionale $x^{\lambda} + ax^{\lambda-1} + bx^{\lambda-2} + \text{ec.} = 0$; e però la (D) avrà un solo fattore commensurabile del grado λ.

326. Poichè in tutti questi casi il fattore (I) risulta razionale; replicato quanto si disse nel (N.° 323), vedesi, che per esso la (D) sarà sempre abbassabile di grado. Merita però qualche riflessione il caso di $\lambda = m$: imperciocchè, se questo succeda, la $x^{\lambda} + a x^{\lambda-1} + b x^{\lambda-2} + a = 0$ venendo ad aver per radici tutte le radici della data, non potrà che essere identica affatto con essa; e perciò la divisione del (N.° 323) non potrà produrci l' abbassamento accennato, risultando

$$\frac{x^{m} + A x^{m-1} + B x^{m-2} + \text{ec.}}{x^{\lambda} + a x^{\lambda-1} + b x^{\lambda-2} + \text{ec.}} = 1.$$

Ora nel caso del (N.° 324), e nel (1.° 2.° N.° 325) non solo è razionale la quantità (I), ma essa stessa è dotata di fattori parimenti razionali; dunque ritenuto $\lambda = m$, se la (D) non è riducibile per mezzo del fattore (I), lo sarà ciò nonostante per mezzo dei fattori razionali di esso (I), onde se l' Equazione di relazione sia

$f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)}) = K$, oppure
$f(x', x'', x''')(x^{IV})(x^{V}) \ldots (x^{(m)}) = K$, ovvero
$f(x', x'', x''')(x^{IV})(x^{V}) \ldots (x^{(m)}) = K$,
$f(x', x'', x''', x^{IV}) \ldots (x^{(m)}) = K$ ec.: la supposta (D) potrà anche allora abbassarsi di grado.

Lo stesso non può dirsi nel caso terzo del (N.° 325); imperciocchè in allora la quantità (I) non à dipendentemente dalla supposta Equazione di relazione fattore alcuno razionale. Dunque se, essendo $\lambda = m$, l' Equazione di relaziozione divenga $f(x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, \ldots x^{(m)}) = K$, la (D) non potrà giammai per suo mezzo ridursi a grado inferiore. Da ciò è che le proprietà generali dei coefficienti esposte nel (Cap.° 2.°) per se nulla giovano ad abbassare di grado l' Equazione proposta.

327. Supponghiamo la (S) quale si suppose nel (N.° 322), e tale inoltre, che non cambi di valore per la sostituzione in luogo della x' di un' altra radice diversa dalle x', x'', x''' ec. $x^{(\lambda)}$, che chiameremo $x^{(\lambda+1)}$. In questa ipotesi potremo bensì determinare tutte le radici x'', x''' ec. $x^{(\lambda)}$ col mezzo di tante Equazioni razionali di primo grado, ma la determinazione della x' vedesi pel (N.° 147), che dipenderà da un' Equazione razionale del grado secondo. Così se la funzione supposta conservi il proprio valore non solo per la sostituzione invece della x' della $x^{(\lambda+1)}$, ma anche per quella delle radici $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(3\lambda+1)}$, ec. $x^{(\rho\lambda+1)}$, le x', $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(3\lambda+1)}$, ec. $x^{(\rho\lambda+1)}$ andranno necessariamente collegate insieme in un' Equazione razionale di tanto grado quante sono le x', $x^{(\lambda+1)}$, ec., cioè del grado $\rho + 1$.

328. Quello, che è stato detto della x', dicesi egualmente delle x'', x''', ec. $x^{(\lambda)}$. Pertanto se il valore della $f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)})$ si conserva il medesimo, permutando tutte le x', x'', x''', ec., $x^{(\lambda)}$ nelle corrispondenti $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$, ec., $x^{(2\lambda)}$; tali radici dipenderanno da λ Equazioni razionali di secondo grado,

nelle quali a due a due si conterranno le x', $x^{\lambda+1}$; x'', $x^{\lambda+2}$; x''', $x^{\lambda+3}$; ec. $x^{(\lambda)}$, $x^{(2\lambda)}$. Egualmente se la nostra funzione resti costantemente $= K$, sostituendo in luogo della x' ciascuna delle $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(3\lambda+1)}$, ec. $x^{(\rho\lambda+1)}$; in luogo della x'' ciascuna delle $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, $x^{(3\lambda+2)}$, ec. $x^{(\rho\lambda+2)}$; in luogo della x''' ciascuna delle $x^{(\lambda+3)}$, $x^{(2\lambda+3)}$, $x^{(3\lambda+3)}$, ec. $x^{(\rho\lambda+3)}$, e così di seguito; la determinazione di queste radici dipenderà da λ Equazioni razionali ciascuna del grado $\rho+1$ (N.° 147).

329. Sia ora la solita funzione della forma $f(x', x'')(x''')(x^{\text{IV}})\ldots(x^{(\lambda)})$, e conservi essa il primo valor K pel cangiamento di tutte le x', x'', x''' ec. $x^{(\lambda)}$ nelle corrispondenti $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$, $x^{(\lambda+4)}$, ec. $x^{(2\lambda)}$ (N.° prec.). Si applicherà a questo caso relativamente alle x''', x^{IV} ec. $x^{(\lambda)}$ quanto è stato detto nel (N.° prec.), e però le radici x''', $x^{(\lambda+3)}$; x^{IV}, $x^{(\lambda+4)}$; ec. $x^{(\lambda)}$, $x^{(2\lambda)}$ si uniranno a due a due in $\lambda-2$ Equazioni razionali del secondo grado; ma applicandosi alle due radici x', x'' quanto abbiamo detto nel (N.° 324), vedesi che queste dipenderanno da un' Equazione del grado secondo, i coefficienti della quale saranno uguali alle quantità $-(x'+x'')$, $x'x''$. Ora conservando la $f(x', x'')(x''')(x^{\text{IV}})\ldots x^{(\lambda)} = K$ il proprio valore pel cangiamento di x' in $x^{(\lambda+1)}$, e per quello di x'' in $x^{(\lambda+2)}$, se vorremo determinare l' una o l' altra di queste funzioni $-(x'+x'')$, $x'x''$, e in generale una funzione qualunque della

la forma $f(x', x'')$ mediante la quantità K, è chiaro che dovremo necessariamente cadere in un' Equazione generale del secondo grado, le cui due radici saranno $f(x', x''')$, $f(x^{\lambda+1}, x^{(\lambda+1)})$ (N.° 147). Se $x^2 + ax + b = 0$ sia l' Equazione, che à le radici x', x''; il coefficiente per esempio a dipenderà da un' Equazione $a^2 + \alpha a + \beta = 0$, in cui α, β saranno razionali, onde chiamate a', a'' le radici di quest' ultima Equazione, e b', b'' i valori corrispondenti della b, avremo le due Equazioni $x^2 + a' x + b' = 0$, $x^2 + a'' x + b'' = 0$, la prima delle quali conterrà le radici x', x'', e la seconda le $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$.

330. Se la funzione data sia della forma $f(x', x'', x''')(x^{IV})(x^{V}) \ldots (x^{\lambda}) = K$, ritenuta la stessa supposizione del (N.° prec.); pel N.° 147) le x', x'', x''' saranno necessariamente radici di un' Equazione $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, in cui ciascuno dei coefficienti a, b, c, essendo funzione della forma $f(x', x'', x''')$, dipenderà da un' Equazione di secondo grado razionale, di cui $f(x', x'', x''')$, $f(x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, x^{(\lambda+3)})$ saran le radici. Così se la detta funzione non cangi valore per la permutazione fra loro delle x', x'', x''', x^{IV}, oppur delle x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}, oppure ec.; la determinazione di queste radici dipenderà corrispondentemente da Equazioni del quarto, del quinto ec. grado, i coefficienti delle quali saranno radici di Equazioni razionali del grado secondo.

Supponghiamo, che la $f(x', x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})$

... $(x^{(\lambda)})$ mantenga il proprio valore cangiando le x', x'', x''', x^{IV}, ec. sì nelle $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$, $x^{(\lambda+4)}$ ec., come nelle $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+3)}$, $x^{(2\lambda+4)}$ ec., applicando a questo caso quanto è stato detto precedentemente, apparisce che le x', x'' saranno radici di un' Equazione $x^2 + ax + b = 0$, di cui i coefficienti a, b dipenderanno da Equazioni razionali del terzo grado. Se il valore di detta funzione resti pure la stessa pel cambiamento delle x', x'', x''', x^{IV}, ec. nelle corrispondenti $x^{(3\lambda+1)}$, $x^{(3\lambda+2)}$, $x^{(3\lambda+3)}$, $x^{(3\lambda+4)}$, ec.; nelle $x^{(4\lambda+1)}$, $x^{(4\lambda+2)}$, $x^{(4\lambda+3)}$, $x^{(4\lambda+4)}$, ec., finalmente nelle $x^{(\mu\lambda+1)}$, $x^{(\mu\lambda+2)}$, $x^{(\mu\lambda+3)}$, $x^{(\mu\lambda+4)}$ ec.; i coefficienti a, b dipenderanno da Equazioni razionali del grado $\mu+1$. Che se la funzione supposta abbia la forma $f(x', x'', x''')(x^{IV})(x^{V})\ldots(x^{(\lambda)})$, ovvero la $f(x', x'', x''', x^{IV})(x^{V})\ldots(x^{(\lambda)})$ ec., e in generale la forma $f(x', x'', x''', x^{IV}\ldots x^{(\eta)})(x^{(\eta+1)})(x^{(\eta+2)})\ldots(x^{(\lambda)})$; la determinazione delle x', x'', x''', x^{IV} ec. dipenderà dalla $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, oppure dalla $x^4 + ax^3 + bx^2 + d = 0$ ec., e in generale dalla

(II) $x^{\eta} + ax^{\eta-1} + bx^{\eta-2} + cx^{\eta-3} + \text{ec.} = 0$, Equazioni tutte, nelle quali ciascuno dei coefficienti sarà determinabile per un' Equazion razionale del grado $\mu+1$.

332. Dalla considerazione degli esposti casi vedesi, che nel primo del (N.° 327) la (D) avrà λ fattori razionali uno del secondo, e gli altri tutti del primo grado, e nel caso secondo dello stes-

so numero tra λ fattori razionali uno ve ne sarà del grado $\rho + 1$. Nella ipotesi del (N.° 328) i λ fattori razionali della (D) saran tutti o del secondo grado, o del grado $\rho + 1$.

Facciamo nel (N.° 329) il prodotto dei due fattori $x^2 + a' x + b'$, $x^2 + a'' x + b''$; i coefficienti del risultato $x^4 + (a' + a'') x^3 + (b' + b'' + a' a'') x^2$ $(a' b'' + a'' b') x + b' b''$, essendo della forma $f(x', x'', x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)})$, saranno tutti determinabili razionalmente dal valor K; e però divenendo esso risultato razionale, la (D) nella supposizione del (N.° 329) avrà $\lambda - 1$ fattori commensurabili, uno del quarto, e gli altri del grado secondo. Nella stessa maniera si vede, che nella ipotesi del (N.° 330) la (D) sarà dotata di un fattor razionale del sesto, o dell' ottavo, o del decimo ec. grado; e nella ipotesi del (N.° 331) essa (D) conterrà un fattore commensurabile, il cui grado verrà espresso da uno dei numeri $2 \cdot 3$, $2(\mu + 1)$, $3(\mu + 1)$, $4(\mu + 1)$, ec., e in generale dal numero $\eta(\mu + 1)$.

Dunque replicandosi quì pure quanto si è accennato nei (N.i 323, 326), ne viene, che la (D) anche nelle supposizioni dei (N.i 327, 328, 329, 330, 331) potrà con la divisione de' fattori razionali abbassarsi di grado.

333. Conviene quì pure, come nel (N.° 326), eccettuare il caso, in cui abbiasi $\eta(\mu + 1) = m$: imperciocchè in questa supposizione il fattor razionale uguagliando il grado della (D), e contenen-

tenendo le sue medesime radici, ne uguaglierà perfettamente il suo primo membro, e quindi dalla divisione non potrà succedere abbassamento veruno. Ciò non ostante poichè ciascun coefficiente della (*II*) (N.° 331), per esempio il coefficiente a dipende da un' Equazione del grado $\mu+1$,
(*III*) cioè dalla $a^{\mu+1}+\alpha a^{\mu}+\beta a^{\mu-1}+\gamma a^{\mu-2}+$ ec. $=0$, i cui coefficienti α, β, γ, u, come si è accennato nel (N.° 332), sono tutti determinabili razionalmente dal valor K, e poichè a cagione di $\eta(\mu+1)=m$, e di $\eta>1$, abbiamo $\mu+1<m$ (N.° 331); ne segue che la (D), quantunque non sia in questo caso abbassabile immediatamente di grado con la divisione, pure sarà sempre riducibile ad un' altra Equazione (*III*) di grado al suo inferiore. Se questa Equazione si sappia risolvere, conosciuti i valori delle radici a', a'', a''', ec. potremo da essi pel (N.° 144) determinare i valori corrispondenti di ciascuno dei coefficienti b, c ec., e chiamati questi b', b'', b''', ec., c', c'', c''', ec., ec. conosceremo i fattori $x^{\lambda}+a'x^{\lambda-1}+b'x^{\lambda-2}+c'x^{\lambda-3}+$ ec., $x^{\lambda}+a''x^{\lambda-1}+b''x^{\lambda-2}+c''x^{\lambda-3}+$ ec.; $x^{\lambda}+a'''x^{\lambda-1}+b'''x^{\lambda-2}+c'''x^{\lambda-3}+$ ec., onde la (D) verrà in tal modo spezzata in tante Equazioni di un grado λ inferiore al suo proprio.

334. Se la nostra $f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)})$ restasse la medesima per altre permutazioni diverse dalle considerate finora, come se si volesse questa funzione tale per esempio, che

$f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)}) = f(x'')(x''')(x')\ldots(x^{(\lambda)})$; è facile a vedersi, che con dei raziocinii simili ai precedenti verremo a delle simili conseguenze. Resterebbe ora a considerarsi il caso della (S) irrazionale; ma noi faremo ciò nel Capo seguente, dopo avere esposte alcune Equazioni particolari capaci di essere abbassate a grado inferiore.

CAPO DECIMOSESTO.

Di alcune Equazioni particolari riducibili ad altre di grado inferiore, e del caso dell' Equazione di relazione (S) *irrazionale.*

335. Mentre viene proposto un Problema, non rare volte accade, che esista qualche relazione particolare fra le radici della Equazione, a cui esso conduce, e in questo caso conosciuta simile relazione, o per la natura del Problema, o per la forma della Equazione, potremo sempre ridur questa a grado minore, servendoci o dei suoi fattori razionali, mentre essi esistono, o della soluzione del Problema del (N.° 144). Sonovi però dei casi, nei quali possiamo eseguire tal riduzione con metodi particolari, senza ricorrere al lungo calcolo del suddetto Problema; e andremo presentemente a riconoscerne alcuni.

336.

336. Abbiasi l' Equazione

(T) $x^{2n} + A c x^{2n-1} + B c^2 x^{2n-2} + C c^3 x^{2n-3} + \ldots$
$+ C c^{2n-3} x^3 + B c^{2n-2} x^2 + A c^{2n-1} x + c^{2n} = 0$.

Conservando questa la stessa forma, mentre sostituiscasi in luogo della x la quantità $\frac{c^2}{x}$, chiamata x' una delle sue radici, sarà pur anche radice la quantità $\frac{c^2}{x'}$, e però, essendo secondo il solito x', x'', x''', x^{iv} ec. $x^{(2n)}$ le radici tutte della data, avremo una di queste, per esempio la $x'' = \frac{c^2}{x'}$, e però $x' x'' = c^2$. Applicando alle altre radici x''', x^{iv}, ec., $x^{(2n)}$ il discorso ora fatto riguardo alle x', x'', vedremo facilmente che esse tutte vanno ad unirsi a due a due in tante Equazioni $x''' x^{\mathrm{iv}} = c^2$, $x^{\mathrm{v}} x^{\mathrm{vi}} = c^2$, ec.; e per conseguenza che il valore della nostra funzione $x' x''$ resterà lo stesso non solo pel cangiamento di x' in x'', ma per quello eziandio simultaneo di amendue le x', x'' nelle x''', x^{iv}, o nelle x^{v}, x^{vi} ec. Dunque pel (N.° 333) la (T) sarà risolubile nei $\frac{2n}{2} = n$ fattori del secondo grado

$x^2 + a' x + b' = 0$, $x^2 + a'' x + b'' = 0$,
$x^2 + a''' x + b''' = 0$, $x^2 + a^{\mathrm{iv}} x + b^{\mathrm{iv}} = 0$, ec.,

in cui le quantità a', a'', a''', a^{iv}, ec. saranno radici della $a^n + \alpha a^{n-1} + \beta a^{n-2} + \gamma a^{n-3} + \text{ec.} = 0$, Equazione del grado n, i coefficienti della quale

sono

sono determinabili razionalmente mediante il Problema del (N.° 144), noi però affine di ottenerla, piuttosto che del citato Problema, farem uso più semplicemente del metodo, che siamo ora per esporre, pel quale converrà premettere la proposizione seguente.

337. Supposto $x + \frac{c^2}{x} = y$, e supposto r un numero intero, e positivo qualunque, avremo

$$(\mathrm{I})\quad x^r + \frac{c^{2r}}{x^r} = y^r - r c^2 y^{r-2} + \frac{r(r-3)}{2} c^4 y^{r-4} - \frac{r(r-4)(r-5)}{2 \cdot 3} c^6 y^{r-6} + \frac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4} c^8 y^{r-8} - \text{ec.}$$

Elevisi la $y = x + \frac{c^2}{x}$ successivamente a tutte le potenze r, $r-2$, $r-4$, $r-6$, ec. fino inclusivamente ad $r-r$, se r è pari, e ad $r-(r-1)$, se r è dispari: avremo così tanti risultati, dai quali, congiungendo il primo con l'ultimo termine, il secondo col penultimo, il terzo con l'antepenultimo, risulterà

$$y^r = \left(x^r + \frac{c^{2r}}{x^r}\right) + r c^2 \left(x^{r-2} + \frac{c^{2r-4}}{x^{r-2}}\right) + \frac{r(r-1)}{2} c^4 \left(x^{r-4} + \frac{c^{2r-8}}{x^{r-4}}\right) + \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} c^6 \left(x^{r-6} + \frac{c^{2r-12}}{x^{r-6}}\right) + \text{ec.}$$

$$y^{r-2} = \left(x^{r-2} + \frac{c^{2r-4}}{x^{r-2}}\right) + (r-2)$$
$$c^2\left(x^{r-4} + \frac{c^{2r-8}}{x^{r-4}}\right) + \frac{(r-2)(r-3)}{2}$$
$$c^4\left(x^{r-6} + \frac{c^{2r-12}}{x^{r-6}}\right) + \text{ec.}$$

$$y^{r-4} = \left(x^{r-4} + \frac{c^{2r-8}}{x^{r-4}}\right) + (r-4)\,c^2$$
$$\left(x^{r-6} + \frac{c^{2r-12}}{x^{r-6}}\right) + \text{ec.}$$

$$y^{r-6} = \left(x^{r-6} + \frac{c^{2r-12}}{x^{r-6}}\right) + \text{ec.}$$

ec. ec.

Si sommino insieme tutte queste Equazioni, dopo avere moltiplicata la seconda per una indeterminata A, la terza per una B, la quarta per una C, ec., e avremo

$$y^r + A\,y^{r-2} + B\,y^{r-4} + C\,y^{r-6} + D\,y^{r-8} + \text{ec.}$$
$$= \left(x^r + \frac{c^{2r}}{x^r}\right) + (r\,c^2 + A)\left(x^{r-2} + \frac{c^{2r-4}}{x^{r-2}}\right) +$$
$$\left(\frac{r(r-1)}{2}c^4 + (r-2)\,A\,c^2 + B\right)\left(x^{r-4} + \frac{c^{2r-8}}{x^{r-4}}\right) +$$
$$\left(\frac{r(r-1)(r-2)}{2\cdot 3}c^6 + \frac{(r-2)(r-3)}{2}Ac^4 + (r-4)Bc^2 + \right.$$
$$\left. C\right)\left(x^{r-6} + \frac{c^{2r-12}}{x^{r-6}}\right) + \left(\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2\cdot 3\cdot 4}c^8 + \right.$$
$$\frac{(r-2)(r-3)(r-4)}{2\cdot 3}A\,c^6 + \frac{(r-4)(r-5)}{2}B\,c^4 +$$
$$\left.(r-6)\,C\,c^2 + D\right)\left(x^{r-8} + \frac{c^{2r-16}}{x^{r-8}}\right) + \text{ec.}$$

Cer-

Cerchiamo ora di determinare i coefficienti A, B, C, D, ec. in maniera, che nel secondo membro di questa Equazione non rimanga che la quantità $x^r + \frac{c^{2r}}{x^r}$; non avremo perciò che a supporre uguali allo zero tutti i coefficienti $(rc^2 + A)$, $\left(\frac{r(r-1)}{2} + (r-2)Ac^2 + B\right)$, $\left(\frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} + \frac{(r-2)(r-3)}{2}Ac^4 + (r-4)Bc^2 + C\right)$ ec., e ciò fatto otterremo $A = -rc^2$, $B = \frac{r(r-3)}{2}c^4$, $C = -\frac{r(r-4)(r-5)}{2 \cdot 3}$, $D = \frac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$, ec.; sostituisco questi valori nella ultima Equazion precedente, e risultandone quindi la (I), ne segue che ec.

Se venga supposto $y = x - \frac{c^2}{x}$, sostituita nella (I) la $-c^2$, in luogo della c^2, ne verrà l' Equazione

$$(II) \quad x^r + \frac{(-c^2)^r}{x^r} = y^r + rc^2y^{r-2} + \frac{r(r-3)}{2}c^4y^{r-4} + \frac{r(r-4)(r-5)}{2 \cdot 3}c^6y^{r-6} + \frac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4}c^8y^{r-8} + \text{ec.}$$

338. Ciò posto, sommiamo nella (T) il primo con l' ultimo termine, il secondo col penultimo, il terzo con l' antepenultimo, e così in progresso, e dividiamo il tutto per x^n; essa (T)

 di-

diverrà perciò della forma

$$\left(x^n + \frac{c^{2n}}{x^n}\right) + Ac\left(x^{n-1} + \frac{c^{2n-2}}{x^{n-1}}\right) + Bc^2\left(x^{n-2} + \frac{c^{2n-4}}{x^{n-2}}\right) + Cc^3\left(x^{n-3} + \frac{c^{2n-6}}{x^{n-3}}\right) +$$

ec. $=$ o. Supponghiamo ora $x + \frac{c^2}{x} = y$, e facciamo nella (*I*) l' esponente r successivamente $= n$, $n-1$, $n-2$, $n-3$, ec.; risultando così

$$\left(x^n + \frac{c^{2n}}{x^n}\right) = y^n - nc^2y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}c^4y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2\cdot3}c^6y^{n-6} + \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)}{2\cdot3\cdot4}c^8y^{n-8} - \text{ec.}$$

$$Ac\left(x^{n-1} + \frac{c^{2n-2}}{x^{n-1}}\right) = Acy^{n-1} - (n-1)Ac^3y^{n-3} + \frac{(n-1)(n-4)}{2}Ac^5y^{n-5} - \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{2\cdot3}Ac^7y^{n-7} + \text{ec.}$$

$$Bc^2\left(x^{n-2} + \frac{c^{2n-4}}{x^{n-2}}\right) = Bc^2y^{n-2} - (n-2)Bc^4y^{n-4} + \frac{n(n-5)}{2}Bc^6y^{n-6} - \frac{n(n-6)(n-7)}{2\cdot3}Bc^8y^{n-8} + \text{ec.}$$

$$Cc^3\left(x^{n-3} + \frac{c^{2n-6}}{x^{n-3}}\right) = Cc^3y^{n-3} - (n-3)Cc^5y^{n-5} + \frac{(n-3)(n-6)}{2}Cc^7y^{n-7} - \text{ec.}$$

$$Dc^4\left(x^{n-4} + \frac{c^{2n-8}}{x^{n-4}}\right) = Dc^4y^{n-4} - (n-4)Dc^6y^{n-6} + \frac{(n-4)(n-7)}{2}Dc^8y^{n-8} - \text{ec.}$$

Ec^5

$$\mathrm{E}c^5\left(x^{n-5}+\frac{c^{2n-10}}{x^{n-5}}\right)=\mathrm{E}c^5y^{n-5}-(n-5)$$
$$\mathrm{E}c^7y^{n-7}+\text{ec.}$$
$$\mathrm{F}c^6\left(x^{n-6}+\frac{c^{2n-12}}{x^{n-6}}\right)=\mathrm{F}c^6y^{n-6}-(n-6)$$
$$\mathrm{F}c^8y^{n-8}+\text{ec.}$$
$$\mathrm{G}c^7\left(x^{n-7}+\frac{c^{2n-14}}{x^{n-7}}\right)=\mathrm{G}c^7y^{n-7}-\text{ec.}$$
$$\mathrm{H}c^8\left(x^{n-8}+\frac{c^{2n-16}}{x^{n-8}}\right)=\mathrm{H}c^8y^{n-8}-\text{ec.}$$
$$\text{ec.}$$

vedesi, che col sommare tutte queste Equazioni la data (T) verrà trasformata nell' altra

(III) $y^n+\mathrm{A}cy^{n-1}+(\mathrm{B}-n)c^2y^{n-2}+(\mathrm{C}-(n-1)\mathrm{A})$
$c^3y^{n-3}+\left(\mathrm{D}-(n-2)\mathrm{B}+\frac{n(n-3)}{2}\right)c^4y^{n-4}+$
$\left(\mathrm{E}-(n-3)\mathrm{C}+\frac{n(n-4)}{2}\mathrm{A}\right)c^5y^{n-5}+$
$\left(\mathrm{F}-(n-4)\mathrm{D}+\frac{(n-2)(n-5)}{2}\mathrm{B}+\frac{n(n-4)(n-5)}{2\,.\,3}\right)$
$c^6y^{n-6}-\text{ec.}=0$, Equazione di un grado minore della metà da quello della proposta. Ponendo successivamente le radici y', y'', y''', ec. della (III) nella supposta $x+\frac{c^2}{x}=y$, ossia nella $x^2-yx+c^2=0$, otterremo un numero di Equazioni di secondo grado, dalla soluzion delle quali si avranno le $2n$ radici della (T).

E' facile il vedere, che la posta y uguaglia la quantità a dei (N.[i] 333, 331) presa negativamente, te, e che la (*III*) altro non è che la $a^n + \alpha a^{n-1} + \beta a^{n-2} +$ ec. $= 0$, prese però le radici col segno contrario.

339. Le Equazioni Algebraiche, che, come la (T), sono dotate della proprietà di non cangiare di forma per la sostituzione di $\frac{c^2}{x}$ in luogo della x, diconsi *convertibili*, o *reciproche*. Venga ora richiesto di determinarne le Formole generali.

340. Supponghiamo perciò, che la

$$x^{2n} + Acx^{2n-1} + Bc^2x^{2n-2} + Cc^3x^{n-3} + \dots + Hc^{n-1}x^{n+1} + Ic^nx^n + Kc^{n+1}x^{n-1} + \dots + Rc^{2n-3}x^3 + Sc^{2n-2}x^2 + Tc^{2n-1}x + Vc^{2n} = 0$$

rappresenti un' Equazione convertibile qualunque di grado pari: se essa deve conservarsi la medesima per la sostituzione di $\frac{c^2}{x}$ invece della x, la nuova $x^{2n} + \frac{T}{V}cx^{2n-1} + \frac{S}{V}c^2x^{2n-2} + \frac{R}{V}c^3x^{2n-3} + \dots + \frac{K}{V}c^{n-1}x^{n+1} + \frac{I}{V}c^nx^n + \frac{H}{V}c^{n+1}x^{n-1} + \dots + \frac{C}{V}c^{2n-3}x^3 + \frac{B}{V}c^{2n-2}x^2 + \frac{A}{V}c^{2n-1}x + \frac{c^{2n}}{V} = 0$, che ne risulta, dovrà essere identica con la supposta, e quindi avremo $\frac{T}{V} = A$, $\frac{S}{V} = B$, $\frac{R}{V} = C$, ec. $\frac{K}{V} = H$, $\frac{I}{V} = I$, $\frac{H}{V} = K$, ec. $\frac{C}{V} = R$, $\frac{B}{V} = S$, $\frac{A}{V} = T$, $\frac{1}{V} = V$. Dall' ultima di queste Equazioni ni ricavo $V = \pm 1$, e però $T = \pm A$, $S = \pm B$, $R = \pm A$, ec. $K = \pm H$, ed $I = I$, se $V = 1$, $I = 0$, se $V = -1$; sostituendo adunque tali valori, l' Equazione supposta si dividerà nelle due

(T) $$x^{2n} + Ac\,x^{2n-1} + Bc^2\,x^{2n-2} + Cc^3\,x^{2n-3} + \ldots + Hc^{n-1}\,x^{n+1} + Ic^n\,x^n + Hc^{n+1}\,x^{n-1} + \ldots + Cc^{2n-3}\,x^3 + Bc^{2n-2}\,x^2 + Ac^{2n-1}\,x + c^{2n} = 0,$$

(U) $$x^{2n} + Ac\,x^{2n-1} + Bc^2\,x^{2n-2} + Cc^3\,x^{2n-3} + \ldots + Hc^{n-1}\,x^{n+1} - Hc^{n+1}\,x^{n-1} - \ldots - Cc^{2n-3}\,x^3 - Bc^{2n-2}\,x^2 - Ac^{2n-1}\,x - c^{2n} = 0$$

le quali saranno due Formole generali di tutte le Equazioni convertibili di grado pari.

2.° Sia la Equazion generale di grado dispari

$$x^{2p+1} + Ac\,x^{2p} + Bc^2\,x^{2p-1} + Cc^3\,x^{2p-2} + \ldots + Hc^p\,x^{p+1} + Kc^{p+1}\,x^p + \ldots + Rc^{2p-2}\,x^3 + Sc^{2p-1}\,x^2 + Tc^{2p}\,x + Vc^{2p+1} = 0.$$

Volendo in questa determinare i coefficienti, onde renderla convertibile, pongo $\frac{c^2}{x}$ invece della x, rinovo il discorso, e il calcolo precedente, e ne verranno le due Equazioni

(V) $$x^{2p+1} + Ac\,x^{2p} + Bc^2\,x^{2p-1} + Cc^3\,x^{2p-2} + \ldots + Hc^p\,x^{p+1} + Hc^{p+1}\,x^p + \ldots + Cc^{2p-2}\,x^3 + Bc^{2p-1}\,x^2 + Ac^{2p}\,x + c^{2p+1} = 0,$$

(Z) $$x^{2p+1} + Ac\,x^{2p} + Bc^2\,x^{2p-1} + Cc^3\,x^{2p-2} + \ldots + Hc^p\,x^{p+1} - Hc^{p+1}\,x^p - \ldots - Cc^{2p-2}\,x^3 - Bc^{2p-1}\,x^2 = Ac^{2p}\,x - c^{2p+1} = 0,$$

le

le quali esprimeranno le Formole generali delle Equazioni reciproche di grado dispari.

341. Veduto nel (N.° 338) come riducasi ad altra di grado inferiore la Equazione (T), sia richiesto di ciò pure eseguire rapporto alle altre (U), (V), (Z).

Ridotte esse alla forma

$$(x^{2n}-c^{2n})+Acx(x^{2n-2}-c^{2n-2})+Bc^2x^2(x^{2n-4}-c^{2n-4})+Cc^3x^3(x^{2n-6}-c^{2n-6})+\ldots\ldots+Hc^{n-1}x^{n-1}(x^2-c^2)=0,$$

$$(x^{2p+1}+c^{2p+1})+Acx(x^{2p-1}+c^{2p-1})+Bc^2x^2(x^{2p-3}+c^{2p-3})+Cc^3x^3(x^{2p-5}+c^{2p-5})+\ldots\ldots+Hc^px^p(x+c)=0,$$

$$(x^{2p+1}-c^{2p+1})+Acx(x^{2p-1}-c^{2p-1})+Bc^2x^2(x^{2p-3}-c^{2p-3})+Cc^3x^3(x^{2p-5}-c^{2p-5})+\ldots\ldots+Hc^px^p(x-c)=0,$$

poichè tutti i binomj della prima di queste Equazioni così espresse sono divisibili esattamente per x^2-c^2, tutti i binomj della seconda sono divisibili per $x+c$, e quelli della terza per $x-c$, eseguisco simili divisioni, e ne verranno i risultati

$$x^{2n-2}+Acx^{2n-3}+(1+B)c^2x^{2n-4}+(A+c)c^3x^{2n-5}+\ldots\ldots+Hc^{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+(A+c)c^{2n-5}x^3+(1+B)c^{2n-4}x^2+Ac^{2n-3}x+c^{2n-2}=0,$$

$$x^{2p}+(A-1)cx^{2p-1}+(B-A+1)c^2x^{2p-2}+\ldots\ldots+(B-A+1)c^{2p-2}x^2+(A-1)c^{2p-1}x+c^{2p}=0,$$

x^{2p}

$$x^{2p} + (A+1)\,c\,x^{2p-1} + (B+A+1)\,c^2\,x^{2p-2} + \ldots\ldots + (B+A+1)\,c^{2p-2}\,x^2 + (A+1)\,c^{2p-1}\,x + c^{2p} = 0:$$

ma queste non sono che tre Equazioni reciproche della forma istessa della (T); dunque saranno riducibili col metodo medesimo del (N.° 338) ad altre di un grado minore della metà; e tutte per conseguenza le Equazioni convertibili sono capaci di un simile abbassamento.

342. L' Equazione $x^m - 1 = 0$ essendo del genere delle convertibili, quali sono le (U), (Z), potrà ridursi ad altra del grado $\frac{m-2}{2}$, se m è pari, o del grado $\frac{m-1}{2}$, se m è dispari.

343. Ridurre a grado inferiore l' Equazione

IV) $x^{mn} + A\,x^{(m-1)n} + B\,x^{(m-2)n} + C\,x^{(m-3)n} + \text{ec.} = 0$

Suppongo $x^n = u$, sostituisco, e ne verrà la Trasformata $u^m + A\,u^{m-1} + B\,u^{m-2} + C\,u^{m-3} + \text{ec.} = 0$, il cui grado è $< mn$. Ponendo successivamente i valori u', u'', u''', ec. $u^{(m)}$ nella $x^n = u$; dalla soluzione di questa tutte otterremo le radici della proposta.

344. Sciogliere l' Equazione

$$y^m - m\,e\,y^{m-1} + \frac{m(m-3)}{2}\,e^2\,y^{m-2} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2\cdot 3}\,e^3\,y^{m-3} + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2\cdot 3\cdot 4}\,e^4\,y^{m-4} - \text{ec.} = V.$$

Supposto $e = c^2$, ed $y = x + \frac{c^2}{x}$, la data pel

(N.° 337) si cangerà nella $x^m + \frac{c^{2m}}{x^m} = V$, ossia $x^{2m} - V x^m + c^{2m} = 0$. Ora la forma di questa Equazione è simile a quella della (*IV*), e fatto però $x^m = u$, è riducibile alla $u^2 - V u + c^{2m} = 0$. Dunque rappresentando α una delle radici *mesime* della unità, poichè abbiamo $u = \frac{V}{2} + \sqrt{\left(\frac{V^2}{4} - c^{2m}\right)}$, sarà $x = \alpha \sqrt[m]{\left(\frac{V}{2} + \sqrt{\left(\frac{V^2}{4} - c^{2m}\right)}\right)}$, e però $y = x + \frac{c^2}{x} = \alpha \sqrt[m]{\left(\frac{V}{2} + \sqrt{\left(\frac{V^2}{4} - c^{2m}\right)}\right)}$

$$+ \frac{c^2}{\alpha \sqrt[m]{\left(\frac{V}{2} + \sqrt{\left(\frac{V^2}{4} - c^{2m}\right)}\right)}} =$$

$$\alpha \sqrt[m]{\left(\frac{V}{2} + \sqrt{\left(\frac{V^2}{4} - c^{2m}\right)}\right)} + \alpha^{m-1} \sqrt[m]{\left(\frac{V}{2} - \sqrt{\left(\frac{V^2}{4} - c^{2m}\right)}\right)}.$$

Conoscendo le radici della $z^m - 1 = 0$, tutti conosceremo i valori della y, e per la somiglianza del precedente valore con la radice della Equazione generale del terzo grado determinata nel (N.° 213) si dà ad esso il nome di *Formola Cardanica*.

345. Prendiamo ora a considerare il caso della (S) (N.° 321) irrazionale. Se sia irrazionale soltanto la quantità cognita K, e non la forma della supposta funzione, è chiaro che potremo sempre, come si è accennato nei (N.ⁱ 322, 324, 325, 327, 328, 329, 330, 331), mediante il Proble-

ma

ma del (N.° 144) da essa K determinare, quantunque irrazionalmente, ciascuna delle x', x'', x''', ec. $x^{(\lambda)}$, oppure ciascuno dei coefficienti della $a^{\mu+1} + \alpha a^{\mu} + \beta a^{\mu-1} + \gamma a^{\mu-2} +$ ec. $= 0$, e ciò per mezzo di tante Equazioni del primo, o del secondo, o del terzo, ec. o del *λesimo* grado. Dunque in questo caso potremo sempre, o con la divisione, come nel (N.° 323), o con la riduzione ad altra Equazione, come nel (N.° 333), render la data (D) di grado inferiore.

346. Sia in secondo luogo incommensurabile la forma della funzione. Posto in tale ipotesi $f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)}) = y$, libero questa Equazione dagli irrazionali, e pel (N.° 121) la riduco così alla

$$(V)\quad y^{p} + G y^{p-1} + H y^{p-2} + I y^{p-3} + \text{ec.} = 0.$$

In ciascuno dei coefficienti G, H, I, ec. non ponno evidentemente entrare altre radici della data, che le x', x'', x''', ec. $x^{(\lambda)}$; ciascuno d' essi adunque uguaglierà una funzion razionale delle stesse x', x'', x''', ec. $x^{(\lambda)}$, cosicchè avremo

$$(VI)\quad \begin{aligned} G &= F'(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)}), \\ H &= F''(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)}), \\ I &= F'''(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)}), \text{ ec.}. \end{aligned}$$

Ora abbiasi ciascuna delle funzioni (*VI*), quale si suppose la (T) nel (N.° 322); in tale ipotesi, se vorremo esprimere per G il valore della x', lo potremo eseguire razionalmente mediante la (M), servendoci della prima delle Equazioni (*VI*), e ne verrà x' uguale ad una funzione della a razionale:

nale: nella maniera medesima venendo richiesto di esprimere la x' per H, dalla seconda delle (*VI*) Equazioni otterremo x' uguale ad una funzione razionale della H: dalla terza ricaveremo egualmente x' uguale ad una funzion della (*I*), e così in progresso. Supponghiamo eseguite simili determinazioni rapporto a tutti i p coefficienti della (*V*), e le corrispondenti Equazioni siano le

(*VII*) $x' = \varphi'(G)$, $x' = \varphi''(H)$, $x' = \varphi'''(I)$, ec.

Poichè a cagione della Equazione (T) la quantità K è una delle radici della (V), ponghiamo essa in luogo della y, e ne venga perciò il risultato

(*VIII*) $K^p + G K^{p-1} + H K^{p-2} + I K^{p-3} +$ ec. $= 0$.

Avendosi ora nelle (*VII*), (*VIII*) un numero $p+1$ di Equazioni contenenti un numero p di quantità G, H, I, ec., vedesi che potremo da esse eliminar queste tutte, e in simile guisa giungeremo ad una Equazione finale priva affatto delle G, H, I, ec., non contenente che la x', e quantità cognite, e la quale potremo per conseguenza suppor della forma $x'^r + g x'^{r-1} + h x'^{r-2} + i x'^{r-3} +$ ec. $= 0$, ossia

(*IX*) $x^r + g x^{r-1} + h x^{r-2} + i x^{r-3} +$ ec. $= 0$,

di cui sia la radice la x'.

Le due Equazioni adunque (D), (*IX*) avranno la radice comune x'; e quindi se fra i loro primi due membri cercheremo il massimo comun divisore, dovrà questo contenere il binomio $x - x'$.

347. Nel modo medesimo, come abbiamo espressa col mezzo dei coefficienti G, H, I, ec. la radice

dice x', potremo col loro mezzo esprimere ancora ciascuna delle altre x'', x''', ec. $x^{(\lambda)}$, e ciò eseguendo, avremo tante Equazioni della forma

$$(X)\quad \begin{array}{l} x'' = \varphi'(G),\ x'' = \varphi''(H),\ x'' = \varphi'''(I),\ \text{ec.} \\ x''' = \varphi'(G),\ x''' = \varphi''(H),\ x''' = \varphi'''(I),\ \text{ec.} \\ \qquad\qquad \text{ec.} \\ x^{(\lambda)} = \varphi'(G),\ x^{(\lambda)} = \varphi''(H),\ x^{(\lambda)} = \varphi'''(I),\ \text{ec.}; \end{array}$$

onde combinando successivamente primo quelle della prima fila, poscia quelle della seconda, e così di seguito con la medesima Equazione (*VIII*), come nel (N.° prec.), ci risulteranno tante Equazioni finali

$$(XI)\quad \begin{array}{l} x^{\prime} + g' x^{\prime-1} + h' x^{\prime-2} + i' x^{\prime-3} + \text{ec.} = 0, \\ x^{\prime} + g'' x^{\prime-1} + h'' x^{\prime-2} + i'' x^{\prime-3} + \text{ec.} = 0, \\ \qquad\qquad \text{ec.} \\ x^{u} + g^{(\lambda-1)} x^{u-1} + h^{(\lambda-1)} x^{u-2} + i^{(\lambda-1)} x^{u-3} + \text{ec.} \end{array}$$

$= 0$, la prima delle quali avrà per radice la x'', la seconda avrà la x''', ec., e l' ultima $x^{(\lambda)}$; e perciò se determineremo il massimo divisor comune fra il primo membro di ciascuna di esse, e quello della (D), nei varii risultati si conterranno i fattori $x - x''$, $x - x'''$, ec. $x - x^{(\lambda)}$.

348. Supponghiamo, che il coefficiente G risulti $= F(x', x'')(x''')(x^{IV}) \ldots x^{(\lambda)}$. Volendo in questa ipotesi da G determinare la x', pel (N.° 324) caderemo in una Equazione $x^2 + a\,1\, x + b\,1 = 0$, di cui x', x'' saranno le radici, e i cui coefficienti $a\,1$, $b\,1$ saranno funzioni razionali della G. Che se anche $H = F''(x', x'')(x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)}$, $I = F'''(x', x'')(x''')(x^{IV}) \ldots x^{(\lambda)}$, ec., troveremo in egual modo corrispondentemente a ciascu-

no di questi coefficienti tante Equazioni

(XII) $x^2 + a1\,x + b1 = 0$, $x^2 + a2\,x + b2 = 0$, $x^2 + a3\,x + b3 = 0$, ec., nelle quali saranno radici le sole x', x'', e nelle quali i coefficienti $a1$, $b1$ saranno funzioni razionali della G, i coefficienti $a2$, $b2$ funzioni razionali della H, gli altri $a3$, $b3$ della I, e così di seguito. Ciò posto, combinando le Equazioni (*XII*) con la (*VIII*) si eliminino da esse, come nel (N.° 346), i coefficienti G, H, I, ec. e giungeremo così ad un' Equazione finale (*IX*) priva di tutte queste quantità G, H, I, ec., e di cui saranno radici amendue le x', x''. Se dunque cercheremo il comun divisore massimo fra il primo membro della (D), e quello della (*IX*) ultimamente risultato, questo dovrà contenere il prodotto $(x - x')(x - x'')$. Se sia

(XIII) $G = F'(x', x'', x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)})$,

$H = F''(x', x'', x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)})$,

$I = F'''(x', x'', x''')(x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)})$, ec. ovvero

$G = F'(x', x'', x''', x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)})$,

$H = F''(x', x'', x''', x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)})$,

$I = F'''(x', x'', x''', x^{IV}) \ldots (x^{(\lambda)})$, ec., oppure ec.; trovate, come nel (caso precedente), dalle Equazioni della prima fila corrispondentemente ai varii coefficienti tante Equazioni

$x^3 + a1\,x^2 + b1\,x + c1 = 0$,

$x^3 + a2\,x^2 + b2\,x + c2 = 0$,

$x^3 + a3\,x^2 + b3\,x + c3 = 0$, ec.,

(XIV) o da quelle della seconda le altre

$x^4 +$

$x^4 + a1\, x^3 + b1\, x^2 + c1\, x + d1 = 0$,
$x^4 + a2\, x^3 + b2\, x^2 + c2\, x + d2 = 0$,
$x^4 + a3\, x^3 + b3\, x^2 + c3\, x + d3 = 0$, ec., se combineremo simili Equazioni con la (*VIII*), eliminati, come precedentemente, i coefficienti G, H, I, ec., otterremo in egual modo un' Equazione finale (*IX*), tra le cui radici esisteranno le quantità x', x'', x''', oppure le x', x'', x''', x^{iv}, oppure, ec. secondo che ànno avuto luogo le prime, o le seconde, ec. delle (*XIII*) Equazioni, e quindi secondo che con la (*VIII*) sonosi combinate le prime, o le seconde, ec. delle Equazioni (*XIV*). In questa supposizione adunque il massimo comun divisore tra la (D), e la corrispondente (*IV*) ascenderà al terzo, o al quarto, ec. grado.

349. Nella maniera medesima si ritrova, che se ciascuno dei coefficienti (*VI*) essendo della forma del (N.° 322), non cangia di valore per la permutazione di x' in $x^{(\lambda+1)}$ (N.° 327), o per quella di x' in ciascuna delle due radici $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+1)}$, o in ciascuna delle tre $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(3\lambda+1)}$, ec., la corrispondente (*IX*), e la (D) avranno rispettivamente il divisore comune $(x - x')(x - x^{(\lambda+1)})$, ovvero l' altro $(x - x')(x - x^{\lambda+1)})(x - x^{(2\lambda+1)})$, o il terzo $(x - x')(x - x^{(\lambda+1)})(x - x^{(2\lambda+1)})(x - x^{(3\lambda+1)})$, ec.

350. Ciò, che si è detto della radice x', è chiaro che dicesi egualmente delle altre x'', x''', ec. $x^{\lambda)}$, onde se rapporto ad esse si verifichi in ciascuno dei coefficienti (VI) qualcuna delle Supposizio-

sizioni fatte della (T) nei (N.^{i} 324, 325, 327); istituito il solito calcolo, verranno così ad ottenersi tante Equazioni finali simili alle (*XI*), ciascuna delle quali avrà con la D altrettanti fattori comuni, o del secondo, o del terzo, o del quarto ec. grado.

351. Supponghiamo, come nel (N.° 329), che ciascuno dei coefficienti G, H, I, ec. sia una funzione della forma $T(x', x'')(x''')(x^{iv}) \ldots . . x^{(\lambda)}$, la quale inoltre non cambi di valore per la permutazione di x' in $x^{(\lambda+1)}$, e per quella di x'' in $x^{(\lambda+2)}$; vedremo quì pure, siccome nel (cit. N.° 329), che volendosi determinare da ciascuno dei coefficienti le radici x', x'', cadremo in tante Equazioni delle forme $x^2 + ax + b = 0$, nelle quali ciascun coefficiente, per esempio a, sarà radice di un' Equazion razionale $a^2 + \alpha' a + \beta = 0$, e vedremo pur anche, come nel (N.° 332), che chiamati a', a'' i due valori della a; b', b'' i due corrispondenti della b, potremo ottenere tante Equazioni di quarto grado $x^4 + (a' + a'')x^3 + (b' + b'' + a'a'')x^2 + (a'b'' + a''b')x + b'b'' = 0$, le cui radici saranno le x', x'', $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, e i coefficienti saranno funzioni razionali delle rispettive quantità G, H, I ec.. Dunque se col mezzo di tutte queste Equazioni di quarto grado già ottenute, e col mezzo della (*VIII*) faremo la solita eliminazione dei coefficienti G, H, I, ec., giungeremo, siccome in passato, ad una Equazione finale avente con la (D) il comun divisore di quar-

to grado $(x - x')(x - x'')(x - x^{(\lambda+1)})(x - x^{(\lambda+2)})$.

Se ciascuna delle quantità G, H, I, ec. uguagli una funzione delle radici simile a qualcheduna delle supposte nei (N.i 330, 331), l'Equazione finale in allora, come può facilmente dedursi dai (N.i 332, prec.), avrà con la (D) un fattore comune del grado sesto, o dell'ottavo, o del decimo, ec., oppure del grado 2 . 3, $2(\mu + 1)$, $3(\mu + 1)$, $4(\mu + 1)$, ec., e in generale del grado $\eta(\mu + 1)$ N.° 332).

352. Da quanto si è detto fin quì, vedesi adunque, che anche nella ipotesi della (T) irrazionale, potrà sempre la (D) abbassarsi di grado. Imperciocchè determinati attualmente i comuni massimi divisori tra le Equazioni finali (IX), (XI), e la (D), verremo in tale maniera nella supposizione del (N.° 346) a determinare λ fattori della (D) di primo grado (N.i 346, 347), e nei casi dei (N.i 348, 349, 350, 351) ne verremo a determinare od uno, o più di grado superiore al primo; fattori, pei quali essa (D) potrà sempre dividersi attualmente.

353. Conviene aggiungere a tutto questo alcune riflessioni, e

1.° Affinchè l' Equazione finale ottenuta nei (N.i 348, 349, 350, 351) abbia con la (D) un fattore comune, quale si è colà determinato; non è difficile il vedere, che i coefficienti G, H, I, ec. dovranno tutti, niuno eccettuato, essere quali li abbiamo supposti nei (citati N.i).

2.° Può qui pure succedere, che nella ipotesi del (N.° 351) risulti, come nel (N.° 333) $\eta(\mu+1) = m$, e però, che il comune divisore fra la Equazione finale, e la (D) uguagli il primo membro della stessa (D): in allora l' Equazione data non sarà capace di abbassamento con la divisione. Ciò non ostante potremo ancora quivi, come si disse nel citato (N.° 333), abbassare di grado essa data, riducendola ad un' altra

$$a^{\mu+1} + \alpha a^{\mu} + \beta a^{\mu-1} + \gamma a^{\mu-2} + \text{ec.} = 0,$$

in cui $\mu + 1 < m$ (N.^{i} 331, 351). Di fatti ricordandoci altro non essere la a, che il coefficiente secondo della $x^{\eta} + a x^{\eta-1} + b x^{\eta-2} + \text{ec.} = 0$ (N.^{i} 331, 351), ed essere perciò $= -(x' + x'' + x''' + \ldots + x^{\eta})$, cerchiamo di esprimere il suo valore mediante ciascuno dei coefficienti G, H, I, ec.. Dal (N.° 333) vedesi che per questo otterremo le p, Equazioni

$$(XV)\quad \begin{cases} a^{\mu+1} + \alpha' a^{\mu} + \beta' a^{\mu-1} + \gamma' a^{\mu-2} + \text{ec.} = 0, \\ a^{\mu+1} + \alpha'' a^{\mu} + \beta'' a^{\mu-1} + \gamma'' a^{\mu-2} + \text{ec.} = 0, \\ a^{\mu+1} + \alpha''' a^{\mu} + \beta''' a^{\mu-1} + \gamma''' a^{\mu-2} + \text{ec.} = 0, \\ \text{ec.}, \end{cases}$$

nelle quali i coefficienti α', β', γ', ec. risulteranno tante funzioni razionali della G, i coefficienti α'', β'', γ'', ec. tante funzioni razionali della H, gli altri α''', β''', γ''', ec. della I, ec.. Combinando queste (*XV*) Equazioni già ricavate con la (*VIII*), si eliminino al solito le quantità G, H, I, ec. affine di giungere ad una Equazione finale

$a^{\nu} +$

(XVI) $a^{\nu} + g\,a^{\nu-1} + h\,a^{\nu-2} + i\,a^{\nu-3} +$ ec. $= 0$, i cui coefficienti g, h, i, ec. siano cogniti, e di cui sia fattore un prodotto
$(a - a')(a - a'')(a - a''')\ldots(a - a^{(\mu+1)})$ rappresentando a', a'', a''', ec. $a^{(\mu+1)}$ i diversi valori della a (N.[i] 329, 351).

Ciò fatto cerchiamo di determinare pel (N.° 105) immediatamente dalla (D) una Trasformata, di cui sia radice la funzione
$-(x' + x'' + x''' + \ldots + x^{(\eta)})$. Chiamata a l' incognita di una simile Trasformata, sia essa la
(XVII) $a^{t} + q\,a^{t-1} + r\,a^{t-2} +$ ec. $= 0$: fra le sue radici è evidente, che esisteranno tutte le precedenti a', a'', a''', ec., $a^{(\mu+1)}$. Dunque se fra i primi membri delle due (*XVI*), (*XVII*) troveremo il massimo comun divisore, altro questo non sarà che il prodotto $(a - a')(a - a'')(a - a''')\ldots(a - a^{(\mu+1)})$, il quale in seguito effettuato, ed uguagliato allo Zero, ci darà un' Equazione della forma
(XVIII) $a^{(\mu+1)} + g\,a^{\mu} + h\,a^{\mu-1} + i\,a^{\mu-2} +$ ec. $= 0$, in cui $\mu + 1 < m$. Dunque ec.

3.° Finalmente osservo, che il valor della K (N.° 346) può essere razionale, e non esserlo: se esso sia razionale, divenendo perciò razionale l' Equazione (*VIII*), ed essendo già tali anche le (*VII*), (X), (*XII*), *XIV*), (*XV*), dovranno evidentemente diventare commensurabili ancora le Equazioni finali (*IX*), (*XI*), (*XVI*), e tali per conseguenza saran pure i fattori ultimi accennati nei (N.[i] 346, 347, 348, 349, 350, 351),

 e ta-e tale sarà la precedente Equazione ($XVIII$). Dunque ogni qualvolta K sia commensurabile, quantunque sia incommensurabile la $f(x')(x'')(x''')$ ....($x^{(\lambda)}$), la determinazione degli espressi fattori della (D) potrà sempre aversi dalla (D) medesima, e la ($XVIII$) potrà aversi dalla sola ($XVII$) semplicemente col mezzo del (Cap.° 14.°) senza servirci del laborioso calcolo indicato nei (N.i 346, 347, 348, 349, 350, 351, 2.° pres.). Che se K sia incommensurabile, diventando perciò irrazionale la ($VIII$), risulteranno irrazionali ancora le Equazioni finali (IX), (XI), (XVI), e però i fattori della (D), e della ($XVII$); onde in questo caso tali fattori non si potranno già determinare mediante il (Capo 14.°), ma converrà ricorrere al calcolo accennato dei sovra espressi (N.i 346, ec.)

CAPO DECIMOSETTIMO.

Della determinazione delle radici reali per approssimazione nelle Equazioni numeriche.

354. Per la impossibilità di ottenere la soluzione generale delle Equazioni di grado superiore al quarto, i Matematici sonosi rivolti a cercare il valore delle radici per approssimazione. Fra i varii meto-

metodi a tal fine proposti noi esporremo i due che seguono, il primo riguardante le radici reali per le Equazioni numeriche, e l' altro per le Algebraiche. Prima però di accingerci a questo, egli è necessario il premettere qualche nozione intorno alle frazioni continue.

355. Una frazione, quale si è

la $p + \cfrac{a}{q + \cfrac{b}{r + \cfrac{c}{s + \text{ec.}}}}$, in cui il primo denominatore

è formato in parte dell' intero q, e in parte del rotto $\frac{b}{r + \text{ec.}}$, il denominatore secondo è formato del intero r, e del rotto $\frac{c}{s + \text{ec.}}$, e così di seguito, dicesi *Frazione continua*.

356. Le frazioni continue, nelle quali ciascun termine è positivo, e ciascun numeratore è $= 1$, quelle sono, che apportano maggiore vantaggio, che a noi presentemente riescano necessarie, e quelle per conseguenza, di cui faremo in adesso parola.

357. Data una qualunque quantità non intera X ridurla in frazione continua.

Determino il numero intero più grande, che si contiene in X, e chiamato questo p, è chiaro che avremo $X - p < 1$, e perciò $\frac{1}{X - p} > 1$. Supponghiamo $\frac{1}{X - p} = X'$; poichè $X' > 1$, cerco il massimo numero intero, che sta entro X', e denominatolo q, sarà $X'-q<1$, e quindi $\frac{1}{X'-q}>1$. Facciasi $\frac{1}{X'-q}=X''$, e giacchè $X''>1$, si chiami r il numero intero più grande, che contienesi in X'', onde risulti $X''-r<1$, e supposto $\frac{1}{X''-r}=X'''$, abbiasi $X'''>1$. Sia s il numero intero più grande, che sta in X''', e sia $\frac{1}{X'''-s}=X^{IV}$; risultando quì pure $X^{IV}>1$, potremo proseguire innanzi il discorso medesimo. Ciò fatto, dalle supposte Equazioni

$\frac{1}{X-p}=X'$, $\frac{1}{X'-q}=X''$, $\frac{1}{X''-r}=X'''$, $\frac{1}{X'''-s}=X^{IV}$, ec. ricavo i valori

$X=p+\frac{1}{X'}$, $X'=q+\frac{1}{X''}$, $X''=r+\frac{1}{X'''}$,

$X'''=s+\frac{1}{X^{IV}}$, ec.; li sostituisco nei luoghi corrispondenti, e ne verrà $X=$ alla frazione continua $p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\text{ec.}}}}$

358. Se sia $X=$ ad un rotto razionale $\frac{M}{N}$, divido M per N, e chiamati p il quoto, α l'avanzo, avremo $X=\frac{M}{N}=p+\frac{\alpha}{N}$, onde essendo

$X-p$

$X - p = \frac{\alpha}{N}$, è evidente, che sarà $\frac{N}{\alpha} > 1$, ed $\frac{N}{\alpha} = X'$ (N.° prec.). Divido N per α, denomino q il quoto, β il residuo, risulterà quindi $X' = \frac{N}{\alpha} = q + \frac{\beta}{\alpha}$, $X' - q = \frac{\beta}{\alpha}$, e però $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, $\frac{\alpha}{\beta} = X''$. Proseguo col dividere α per β, col chiamare r il quoto, γ l' avanzo, e avendosi con ciò $X'' = \frac{\alpha}{\beta} = r + \frac{\gamma}{\beta}$, ne verrà $\frac{\beta}{\gamma} > 1$, $\frac{\beta}{\gamma} = X'''$; onde potrò nel modo medesimo seguitare l' operazione. Pongo ora in luogo delle quantità $\frac{\alpha}{N}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\delta}{\gamma}$, ec. i rispettivi valori

$$\frac{1}{q+\frac{\beta}{\alpha}},\quad \frac{1}{r+\frac{\gamma}{\beta}},\quad \frac{1}{s+\frac{\delta}{\gamma}},$$

ec., e ci risulterà

$$\frac{M}{N} = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{ec.}}}}$$

L' operazione ora accennata, affine di gettare in frazione continua il rotto $\frac{M}{N}$, vedesi altro non essere che quella stessa, di cui ci serviamo per determinare il massimo comun divisore fra le quantità M, N, e i numeri p, q, r, s, ec. altro

non

non sono che i successivi quozienti. Ora sappiamo dall' Algebra, che questa operazione, essendo M, N due numeri interi, è sempre finita. Dunque una frazion razionale potrà sempre svolgersi in una continua di un numero finito di termini; il che non può dirsi delle altre quantità non intere X (N.° precedente).

359. Gettare in frazione continue il rotto $\frac{69}{7545}$, e il decimale, 3, 1415926.

Opero in (*II*) riguardo al primo rotto, come se cercassi il massimo comun divisore fra i due numeri *69*, *7545*; e riguardo al decimale, considerando questo, come un rotto $\frac{31415926}{10000000}$, opero su di esso nella maniera medesima, e per tal modo otterremo

$$\frac{69}{7545} = 0 + \cfrac{1}{109 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}}}\,,\quad 3,1415926 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{243 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}}}}}$$

Nel primo di questi risultati, a cagione di $69 < 7545$, deve essere $p = 0$, ossia deve mancare la re la parte intera; e ciò sempre succederà nelle frazioni vere.

```
        7545 | 69 | 0
              0
(II)         69 | 7545 | 109
                  69
                   645
                   621
                    24 | 69 | 2
                         48
                         21 | 24 | 1
                              21
                               3 | 21 | 7
                                   21
                                    *
```

360. Dalla precedente Frazione X (N.° 356) prendiamo le quantità successive

$$(III)\quad p,\ p+\frac{1}{q},\ p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}},\ p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s}}},\ p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{t}}}}\ \text{ec.}$$

e coi principii della aritmetica ridotte queste alle frazioni ordinarie

$$(IV)\quad \frac{p}{1},\ \frac{pq+1}{q},\ \frac{pqr+r+p}{qr+1},\ \frac{pqrs+rs+ps+pq+1}{qrs+s+q},$$
$$\frac{pqrst+rst+pst+pqt+t+pqr+r+p}{qrst+st+qt+qr+1},\ \text{ec.}$$

chiamiamo successivamente A, B, C, D, E, ec. i loro numeratori, ed A′, B′, C′, D′, E′, ec. i denomina-

 mina-

minatori corrispondenti, onde tali frazioni vengano rappresentate dalle

(*V*) $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$, ec.. Ciò fatto, dalla forma delle (IV) è evidente che avremo

$A = p$, $B = qA + 1$, $C = rB + A$,
$D = sC + B$, $E = tD + C$, ec.

(*VI*) $A' = 1$, $B' = qA'$, $C' = rB' + A'$,
$D' = sC' + B'$, $E' = tD' + C'$, ec..

361. In conseguenza di questa proprietà potremo assai semplicemente ridurre una data frazion continua finita X a frazione ordinaria.

Scritte perciò in (*VII*) le quantità, p, q, r, s, t, ec. in una prima riga, e posta in una seconda in primo luogo la p con al di sotto l' unità, si moltiplichi sì la p, che la unità per q, e al prodotto pq aumentato di 1 sottoscrivasi nel secondo luogo la q. In seguito si moltiplichino per r il numeratore, e il denominatore della frazion risultata $\frac{pq+1}{q}$, si aumentino corrispondentemente del numeratore, e del denominatore della $\frac{p}{1}$, e ne verrà così la terza delle frazioni (*IV*), che colloco nel terzo luogo. Moltiplico poscia per s il dividendo, e il divisore di questa terza frazione, aumento questi prodotti del dividendo, e del divisore della frazione seconda, e risultando in tal modo la quarta delle (*VI*) frazioni, la pongo nel quarto luogo. Proseguo a moltiplicare per t il numeratore,

e il

e il denominatore della frazion quarta, sommo coi risultati il dividendo, e il divisore della frazion terza, e risultandoci da ciò la quinta delle frazioni (*IV*), la scrivo nel quinto luogo; e in tale maniera seguitando sempre ad operare finchè si giunga all' ultima lettera contenuta in X, vedesi dalle (*V*), (*VI*), che otterremo tutti i successivi valori (*IV*) delle (*III*), e però anche il valor domandato della X.

$$(VII)\quad \overset{p}{\frac{p}{1}},\ \overset{q}{\frac{pq+1}{q}},\ \overset{r}{\frac{pqr+r+p}{qr+1}},\ \overset{s}{\frac{pqrs+rs+ps+pq+1}{qrs+s+q}},$$

$$\overset{t}{\frac{pqrst+rst+pst+pqt+t+pqr+r+p}{qrst+st+qt+qr+1}},\ \text{ec.}$$

362. Vogliasi per esempio ridurre la terza delle frazioni continue esposte nel (N.° 359). Opero in (*VIII*), giusta il metodo precedente, e l' ultimo dei risultati sarà appunto il valore richiesto, poichè moltiplicato il suo numeratore, ed il denominatore per lo stesso numero 2, ne viene

$$\frac{15707963}{5000000} = \frac{31415926}{10000000} = 3,1415926$$

$$(VIII)\quad \overset{3}{\frac{3}{1}},\ \overset{7}{\frac{22}{7}},\ \overset{15}{\frac{333}{106}},\ \overset{1}{\frac{355}{113}},\ \overset{243}{\frac{86598}{27565}},\ \overset{1}{\frac{86953}{27678}},\ \overset{1}{\frac{173551}{55243}},$$

$$\overset{9}{\frac{1648912}{524865}},\ \overset{1}{\frac{1822463}{580108}},\ \overset{1}{\frac{3471375}{1104973}},\ \overset{4}{\frac{5707963}{5000000}}.$$

363. Poichè le quantità p, q, r, s, t, ec. voglionsi tutte positive (N.° 356), dai valori delle quantità A, B, C, ec. A', B', C', ec. espressi in (*VI*) vedesi che dovrà essere $A < B, B < C, C < D, D < E$, ec. $A' =$, oppure $< B'$, $B' < C'$, $C' < D'$, $D' < E'$, ec..

Dai valori medesimi (*VI*) vedesi ancora, che dovrà essere $BA' - B'A = 1$, $CB' - C'B = -1$, $DC' - D'C = 1$, $ED' - E'D = -1$, ec..

364. Le frazioni (*V*) saran sempre tali, che $\frac{A}{A'} < X$, $\frac{B}{B'} > X$, $\frac{C}{C'} < X$, $\frac{D}{D'} > X$, $\frac{E}{E'} < X$, ec.

Ciò si deduce agevolmente dal paragonare le parti fratte dei valori (*III*) con la parte rotta della X.

365. Le frazioni sono tutte ridotte ai minimi termini.

Se ciò non fosse, e si volesse, che per esempio nella $\frac{C}{C'}$ le quantità C, C' avessero un comune divisore $K > 1$, per lo stesso numero K dovrebbe essere divisibile anche la quantità $DC' - D'C$; ma a cagione di $D'C - D'C = 1$ (N.° 363) questo è impossibile. Dunque ec.

Quindi si vede il perchè riducendo la terza delle frazioni continue del (N.° 359) non ritorna la $\frac{31415926}{10000000}$, da cui essa è nata; ma bensì la $\frac{15707963}{5000000}$ (N.° 362), non essendo quest' ultima,

che

che la frazion prima ridotta ai minimi termini.

366. Le differenze tra le frazioni (*V*) vanno sempre impiccolendosi.

Sottraendo tali frazioni consecutivamente l' una dall' altra, pel (N. 365.) ci risulta

$$\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'\,B'}$$
$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{B'\,C'}$$
$$\frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{C'\,D'}$$
$$\frac{E}{E'} - \frac{D}{D'} = -\frac{1}{D'\,E'} \quad \text{, ec.}$$

Ma pel citato (N.° 363) abbiamo $A'B' < B'C'$, $B'C' < C'D'$, $C'D' < D'E'$, ec. Dunque sarà $\frac{1}{A'\,B'} > \frac{1}{B'\,C'}$, $\frac{1}{B'\,C'} > \frac{1}{C'\,D'}$, $\frac{1}{C'\,D'} > \frac{1}{D'\,E'}$, ec., e però ec.

367. La differenza tra la X, ed una qualunque delle frazioni (*V*) è sempre minore della unità divisa pel quadrato del denominatore spettante alla frazione supposta.

Essendo $\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'\,B'}$, del (N.° 364), è chiaro che sarà $X - \frac{A}{A'} > \frac{1}{A'\,B'}$, ma a cagione di $A' =$, oppur $< B'$ (N.° 363) abbiamo $\frac{1}{A'\,B'} =$,

op-

oppur $< \frac{1}{A'^2}$; dunque sarà ancora $X - \frac{A}{A'} < \frac{1}{A'^2}$.
Nella maniera medesima troveremo $\frac{B}{B'} - X < \frac{1}{B'^2}$, $X - \frac{C}{C'} < \frac{1}{C'^2}$, $\frac{D}{D'} - X < \frac{1}{D'^2}$, ec.. Dunque ec.

Perciò la differenza tra il numero 3, 1415926, e la seconda, o la quarta ec. delle frazioni (*VIII*) sarà corrispondentemente $< \frac{1}{7^2}$, $< \frac{1}{113^2}$, ec., ossia $< \frac{1}{49}$, $< \frac{1}{12769}$. Ora esso numero 3, 1415926 altro non ci esprime che assai prossimamente il rapporto della circonferenza al diametro; vedesi adunque quando le frazioni $\frac{22}{7}$, $\frac{353}{133}$, ec. si accostano ad un simil rapporto.

368. Dai (N.[i] 363, 367) apparisce, che le frazioni (*V*) vanno sempre più accostandosi al valor della X.

369. Nelle solite frazioni (*V*) la differenza fra due di esse qualsivogliono consecutive è piccola in maniera, che fra di loro non può esistere alcun' altra frazione, il cui denominatore non sia più grande dei denominatori delle due frazioni supposte.

Prendiamo a considerare per esempio le due $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$, ed esprima $\frac{m}{n}$ una qualunque delle frazioni collocate fra di esse. Dovrà essere

D

$\frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} > \frac{m}{n} - \frac{C}{C'}$; ossia $\frac{1}{C'D'} > \frac{mC' - nC}{C'n}$ (N.° 366): ma qualunque valore intero abbiansi le m, n, è chiaro che non può giammai essere $\frac{mC' - nC}{C'n} < \frac{1}{C'n}$: dunque sarà ancora $\frac{1}{C'D'} > \frac{1}{C'n}$, e per conseguenza $C'n > C'D'$, e dividendo per C', avremo $n > D'$; ma a cagione di $D' > C'$ (N.° 363) abbiamo ancora $n > C'$. Dunque ec.

370. Pei (N.[i] 364, 369) è chiaro potersi asserire, che ciascuna delle frazioni (*V*) si accosta al valore della X, quanto è mai possibile, cioè per modo, che nessun' altra frazione avente un dividendo non maggiore del dividendo della frazione supposta potrà mai egualmente, o più di essa accostarsi alla X.

Nel (N.° 362) la quarta per esempio delle frazioni (*VIII*) si avvicina tanto al valore 3, 1415926, ch' egli è impossibile trovare alcun altro rotto ad esso più prossimo, il cui denominatore non sia > 113.

371. Prendansi nelle frazioni (*V*) separatamente i termini, che si alternano, e forminsi con questi le due serie

$$(IX)\quad \begin{array}{l} \frac{A}{A'},\ \frac{C}{C'},\ \frac{E}{E'},\ \text{ec.} \\ \frac{B}{B'},\ \frac{D}{D'},\ \frac{F}{F'},\ \text{ec.} \end{array}$$

La prima di tali serie sarà pel (N.° 364) crescente verso X, decrescente la seconda, e dai valori

(*VI*) è facile a vedersi, che avremo

$$\frac{C}{C'} - \frac{A}{A'} = \frac{r}{A'C'}, \quad \frac{E}{E'} - \frac{C}{C'} = \frac{t}{C'E'}, \text{ ec.}$$

$$\frac{B}{B'} - \frac{D}{D'} = \frac{s}{B'D'}, \quad \frac{D}{D'} - \frac{F}{F'} = \frac{u}{D'F'}, \text{ ec.}.$$

372. In conseguenza di ciò, se fosse $r = 1$, col raziocinio istesso del (N.° 369) vedremmo non poter esistere tra le $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$ alcun altro rotto, il cui denominatore non sia $> A'$, e $> C'$; ma se $r > 1$, allora tra esse $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$ potranno aver luogo $r - 1$ di simili rotti, e tali saranno quei, che risultano, ponendo nel valore di $\frac{C}{C'}$ ricavato dai valori (*VI*), cioè in $\frac{rB + A}{rB' + A'}$ successivamente in luogo del numero r i numeri 1, 2, 3, ec. $r - 2$; onde i risultati

$$(X)\ \frac{B + A}{B' + A'},\ \frac{2B + A}{2B' + A'},\ \frac{3B + A}{3B' + A'},\ \text{ec.}\ \frac{(r-1)B + A}{(r-1)B' + A'}$$

non saranno che altrettante frazioni esistenti tra le $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, i denominatori delle quali saran tutti $< C'$.

Difatti presa una qualunque di queste frazioni (X), e chiamata $\frac{\mu B + A}{\mu B' + A'}$, essendo $\mu < r$; avremo primieramente il denominatore $\mu B' + A' < rB' + A'$, e però $< C'$, poichè $C' = rB' + A'$ (N.° 360). Inoltre avendosi

μB

$\frac{\mu B + A}{\mu B' + A'} - \frac{A}{A'} = \frac{\mu}{A'(\mu B' + A')}$ (N.° 363), e

$\frac{C}{C'} - \frac{\mu B + A}{\mu B' + A'} = \frac{r - \mu}{C'(\mu B' + A')}$ (N.[i] 360, 363);

sarà $\frac{\mu B + A}{\mu B' + A'} > \frac{A}{A'}$, e $< \frac{C}{C'}$; e per conseguenza la nostra $\frac{\mu B + A}{\mu B' + A'}$, e quindi tutte le frazioni (X), nel mentre che hanno un denominatore $< C'$, sono tutte contenute fra le $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$.

373. **Fra due qualunque delle frazioni (*IX*) consecutive non può esistere alcun' altra frazione, il cui denominatore non sia maggiore dei denominatori di tali frazioni.**

Poichè $\frac{\mu B + A}{\mu B' + A'} - \frac{(\mu - 1)B + A}{(\mu - 1)B' + A'} =$

$\frac{1}{(\mu B' + A')((\mu - 1)B' + A')}$, la dimostrazione è la stessa che quella del (N.° 369).

Avendosi $\frac{\mu B + A}{\mu B' + A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{B'(\mu B' + A')}$, nella maniera medesima del (N.° 369) si ritrova che fra ciascuna delle (X), e la $\frac{B}{B'}$ non à luogo alcuna frazione $\frac{m}{n}$, in cui non sia $n > B'$, e $> \mu B' + A'$.

374. Ciò, che abbiamo dimostrato nei (N.[i] 372, 373) delle $r - 1$ frazioni (X) intermedie

tra le $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, dicesi egualmente delle altre $r-1$, che, come nel (N.° 372), si dimostrano esistenti fra le $\frac{C}{C'}$, $\frac{E}{E'}$, delle altre $s-1$, le quali ànno luogo fra le $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, delle altre $u-1$, che ritrovansi tra le $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, e così di seguito.

375. Affine di distinguere le frazioni (X) dalle altre accennate nei (N.ⁱ 372, 374) chiameremo le prime *principali*, *intermedie* le seconde, e scrivendole tutte in (XI) secondo il loro valore, ne verranno due serie, l' una di quantità tutte minori, e crescenti, la seconda di quantità tutte maggiori, e decrescenti verso la X. Tutte queste quantità poi pel (N.° 373) si dimostrano, come nei (N.ⁱ 369, 370), approssimantisi al valore della X quanto è mai possibile

$$(XI)\quad \frac{A}{A'},\ \frac{B+A}{B'+A'},\ \frac{2B+A}{2B'+A'},\ \frac{3B+A}{3B'+A'},\ \text{ec.}\ \frac{(r-1)B+A}{(r-1)B'+A'},$$

$$\frac{C}{C'},\ \frac{D+C}{D'+C'},\ \frac{2D+C}{2D'+C'},\ \frac{3D+C}{3D'+C'},\ \text{ec.}\ \frac{(t-1)D+C}{(t-1)D'+C'},$$

$$\frac{E}{E'},\ \text{ec.}\ \frac{A+1}{A'},\ \frac{2A+1}{2A'},\ \frac{3A+1}{3A'},\ \text{ec.}\ \frac{(q-1)A+1}{(q-1)A'},$$

$$\frac{B}{B'},\ \frac{C+B}{C'+B'},\ \frac{2C+B}{2C'+B'},\ \frac{3C+B}{3C'+B'},\ \text{ec.}\ \frac{(s-1)C+B}{(s-1)C'+B'},$$

$$\frac{D}{D'},\ \frac{E+D}{E'+D'},\ \frac{2E+D}{2E'+D'},\ \frac{3E+D}{3E'+D'},\ \text{ec.}\ \frac{(u-1)E+D}{(u-1)E'+D'},$$

$$\frac{F}{F'},\ \text{ec.}\,.$$

376. Data una quantità qualunque non intera X trovare tutte le frazioni, le quali si avvicinano alla X quanto si può mai, cioè per modo, che fra tali frazioni, e la X non abbia luogo alcun altro rotto più prossimo, il cui denominatore non sia maggiore del denominatore di esse.

Riduco pel (N.° 357) la X in frazione continua; quindi determino pel (N.° 360) le frazioni (*V*), ed esse tutte pel (N.° 370) scioglieranno il Problema. Formo in seguito le due serie (*IX*), determino pei (N.i 372, 374) tutte le frazioni intermedie, e le due serie (*XI*) così trovate ci daranno la soluzione totale; e di fatti se esistesse qualche altra frazione differente dalle (*XI*) capace di sciogliere il Problema, questa dovrebbe evidentemente trovarsi in mezzo alla prima, o alla seconda delle due serie (*XI*); ma ciò è impossibile. Dunque ec.

377. Se sia $X = 3,1415926$, eseguite, siccome nei (N.i 359, 362, 372, 374), le operazioni accennate nel (N.° prec.), otterremo le due serie

$$\frac{3}{1},\ \frac{25}{8},\ \frac{47}{15},\ \frac{69}{22},\ \frac{91}{29},\ \frac{113}{36},\ \frac{135}{43},\ \frac{157}{50},\ \frac{179}{57},$$
$$\frac{201}{64},\ \frac{223}{71},\ \frac{245}{78},\ \frac{267}{85},\ \frac{289}{92},\ \frac{311}{99},\ \frac{333}{106},\ \text{ec.}$$

$$\frac{4}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\ \frac{19}{6},\ \frac{22}{7},\ \frac{355}{113},\ \text{ec.},$$

la prima delle quali ci esprimerà i numeri tutti minori, e prossimi quanto è possibile al 3, 1415926,

 l' all' altra i maggiori; e sì l' una per conseguenza, che la seconda si avvicineranno vieppiù ad esprimere esattamente il rapporto della circonferenza, al diametro.

Ciò basti delle frazioni continue.

378. Trovare un numero più grande di tutte le radici reali della

(C) $F x^m + G x^{m-1} + H x^{m-2} + I x^{m-3} + \text{ec.} = 0$, essendo il coefficiente F positivo. Supposto $x = y + r$, trasformo pel (N.° 80) la (C) nell' altra

$$(XII)\quad \left.\begin{array}{l} (F r^m + G r^{m-1} + H r^{m-2} + I r^{m-3} + \text{ec.}) + \\ (m F r^{m-1} + (m-1) G r^{m-2} + (m-2) \\ \quad H r^{m-3} + \text{ec.})\, y + \\ \left(\frac{m(m-1)}{2}\right) F r^{m-2} + \left(\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right) \\ \quad G r^{m-3} + \text{ec.})\, y^2 + \\ \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} F r^{m-3} + \text{ec.}\right) y^3 + \\ \qquad \text{ec.} \end{array}\right| = 0$$

Ora se la r à un valor tale, che renda positivi tutti i coefficienti della Trasformata; tal Trasformata dovrà avere tutte le sue radici reali negative; e però essendo negativi tutti i valori reali della y, qualunque delle radici reali della (C) pongasi in luogo della x, ci darà sempre $x - r < 0$, e perciò avremo $r > x$. Scioglieremo dunque il problema, sostituendo nella (*XII*) in vece della r un numero capace di rendere positivi tutti i suoi coefficienti, e questo numero a cagione del coefficienficiente F positivo, è facile a vedersi, che si determinerà, collocando successivamente i numeri $0, 1, 2, 3$, ec. in luogo della r.

Sia per esempio $9x^4 - 24x^3 + 16x^2 - 24x + 7 = 0$ l' Equazione data; fatto $x = y + r$, avendosi

$$\left.\begin{array}{l}(9r^4 - 24r^3 + 16r^2 - 24r + 7) + \\ (36r^3 - 72r^2 + 32r - 24)y + \\ (54r^2 - 72r + 16)y^2 + \\ (36r - 24)y^3 + \\ 9y^4\end{array}\right| = 0$$

Suppongo successivamente $r = 0, 1, 2$, ec. Ora allorchè faccio $r = 3$, la Trasformata diviene $9y^4 + 84y^3 + 286y^2 + 396y + 160 = 0$, Equazione, in cui tutti i coefficienti sono positivi. Dunque il 3 sarà un numero maggiore di tutte le radici reali della data, e vedesi di fatti esser ciò vero, poichè $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{3}$ sono le sue radici reali.

379. Determinare un numero minore di tutte le differenze fra le radici reali, e disuguali della (C).

Tolte pel (N.° 306) dalla (C) le radici uguali, se pur ve ne ànno, determino pel (N.° 86) dall' Equazion, che risulta, l' Equazione delle differenze, e supposto che tale Equazione delle differenze ci venga rappresentata dalla $y^h + ay^{h-1} + by^{h-2} + \text{ec.} + ty + u = 0$, faccio $y = \frac{1}{z}$, onde avere la Trasformata $uz^h + tz^{h-1} + sz^{h-2} + \text{ec.} + az + 1 = 0$ (N.° 82).

De-

Determino ora pel (N.° prec.) un numero maggiore di tutte le radici reali di quest' ultima Equazione, e chiamato esso K, giacchè abbiamo $K > z$, sarà $\frac{1}{K} < \frac{1}{z}$, e però $\frac{1}{K} < y$. Ma la y non fa che rappresentarci il quadrato della differenza fra due quali si vogliano delle radici reali, e disuguali della (C) (N.° 86): dunque essendo $\frac{1}{K}$ minore di un simile quadrato, la quantità $\frac{1}{\sqrt{K}}$ quella sarà, che somministra la soluzione del Problema.

Sia per esempio $x^3 - 5x - 4 = 0$ l' Equazione data. Non avendo questa radici uguali, trovo immediatamente la sua Equazione delle differenze, e determinata così la $y^3 - 30y^2 + 225y - 68 = 0$, suppongo $y = \frac{1}{z}$, onde avere la $68z^3 - 225z^2 + 30z - 1 = 0$. Cerco presentemente in quest' ultima Equazione un numero maggiore di tutte le sue radici reali, e supposto perciò pel (N.° 378) $z = u + r$, la trasformo nella

$$\left.\begin{array}{l} (68r^3 - 225r^2 + 30r - 1) + \\ (204r^2 - 450r + 30)u + \\ (204r - 225)u^2 + \\ 68u^3 \end{array}\right| = 0.$$

e poiche collocando quivi successivamente in luogo della r i numeri 0, 1, 2, 3, ec., trovo che alla sostituzione del 4, essa Trasformata diviene

$871 + 1494\,u + 591\,u^2 + 63\,u^3 = 0$ con tutti i suoi termini positivi, dirò che il 4 è un numero maggiore di tutti i valori reali della z, e quindi che $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, è un numero minore di tutte le differenze fra le radici reali della $x^3 - 5\,x - 4 = 0$.

380. Chiamate α, β, γ ec. le radici reali, e μ, ν, π, ρ, ec. le radici immaginarie della (D); se porremo in essa (D) in luogo della x due numeri p, q tali, che $p > \alpha$, $q < \alpha$, e tali, che la differenza tra loro sia minore della differenza tra α, ed un' altra qualunque delle β, γ, ec., ne verranno sempre due risultati di segno fra loro contrarii.

Supponghiamo $\alpha > \beta$, cosicchè $\alpha - \beta > 0$. Poichè per la ipotesi $p - q < \alpha - \beta$, trasportando avremo $\beta - \alpha < q - p$, e sommando queste due quantità con le altre $\alpha < p$, otterremo $\beta + \alpha - \alpha < q + p - p$, $\beta < q$, e però $q - \beta > 0$. Ma a cagione di $p > \alpha$, e di $\alpha > \beta$ abbiamo ancora $p > \beta$, e quindi $p - \beta > 0$. Dunque in questo caso i due binomii $p - \beta$, $q - \beta$ saranno amendue positivi. Che se $\alpha < \beta$; avendosi allora $\beta - \alpha > 0$, e $p - q < \beta - \alpha$, sommando queste quantità con le altre $q < \alpha$, ne verrà $p < \beta$, e perciò $p - \beta < 0$; ma a cagione di $q < \alpha$, anche $q - \alpha < 0$; dunque in questa seconda ipotesi $p - \beta$, $q - \beta$ saranno quantità amendue negative, e per conseguenza in qualunque supposizione i due binomii $p - \beta$, $q - \beta$ saran sempre del medesimo segno. Ora lo stesso si dimostra rapporto ai due $p - \gamma$, $q - \gamma$, ai due $p - \delta$,

$q - \delta$,

$q-\delta$, ec., e di più i due prodotti
$(p-\mu)(p-\nu)(p-\pi)(p-\rho)\ldots$,
$(q-\mu)(q-\nu)(q-\pi)(q-\rho)\ldots$ sono entrambi reali, e positivi (N.° 59). Dunque gli altri due prodotti $(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta)\ldots$
$(p-\mu)(p-\nu)(p-\pi)\ldots(q-\beta)(q-\gamma)(q-\delta)$
$\ldots(q-\mu)(q-\nu)(q-\pi)\ldots$ saranno amendue dello stesso segno, e però a cagione di $p-\alpha>0$, $q-\alpha<0$, i terzi

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta)\ldots$$
$$(p-\mu)(p-\nu)(p-\pi)\ldots$$
$$(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)(q-\delta)\ldots$$
$$(q-\mu)(q-\nu)(q-\pi)\ldots$$

saranno di segno contrario. Ma questi ultimi due prodotti non sono, se non se ciò, che diventa il primo membro della (D) per la sostituzione delle quantità p, q in luogo della x. Dunque ec.

381. Se la differenza tra le due quantità p, q sia minore della differenza fra due qualunque delle radici della (D), come se $p-q=\frac{1}{\sqrt{K}}$, (N.° 379); e se collocando in (D) in luogo della x tali quantità, ne vengano due risultati di segno contrario; io dico, che tra esse p, q esisterà sempre una sola delle radici della data.

Che fra le p, q esista nella nostra supposizione almeno una radice della (D), questo il sappiamo dal (N.° 51); che poi non ne esista che una sola, ciò si dimostra facilmente; poichè se ne esistesstessero due, per esempio le due α, β, allora la differenza fra queste α, β sarebbe evidentemente minore della differenza tra le p, q contro della supposizione. Dunque ec.

382. Determinare i numeri interi prossimamente inferiori a tutte le radici reali della (D).

Comincio dal togliere nella (D) le radici uguali (N.° 306), determino poscia pel (N.° 379) la quantità $\frac{1}{\sqrt{K}}$ minore di tutte le differenze tra le sue radici reali, e disuguali, e se $\sqrt{K}$ non è numero intero, pongo in suo luogo il numero ad esso prossimamente maggiore, che chiamo n, onde in vece di $\frac{1}{\sqrt{K}}$ avere il rotto razionale $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{K}}$; e trovo finalmente pel (N.° 378) il numero r maggiore di tutte le radici della (D). Ciò fatto colloco successivamente nel primo membro della (D) in luogo della x i numeri

(*XIII*) $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}$, ec., e ciò fino ad un numero $\frac{b}{n} =$, ovvero prossimamente $> r$; osservo i risultati, che alternansi nel segno, e poichè pei (N.[i] 380, 381) fra i diversi termini della nostra serie (*XIII*) capaci di produrre simili risultati alternantisi nel segno tutte si contengono ad una ad una le radici reali e positive della (D), tutti prendo i numeri interi, che sono prossimamente inferiori a questi termini, e tali numeri faranno tutti gl' interi inferiormente più vicini alle domandate radici reali positive. Passando in seguito alla ricerca dei numeri interi prossimamente inferiori alle radici negative; colloco nella (D) $-x$ in luogo della x; cerco, come precedentemente nella Equazion, che risulta, gl' interi prossimamente maggiori a tutte le sue radici reali positive, e tali numeri cangiati di segno saranno i prossimamente minori alle radici reali negative della data.

Vogliansi i numeri interi prossimamente inferiori alle radici reali della $x^3 - 5x - 4 = 0$. Poichè quivi non esistono radici uguali, poichè abbiamo $\sqrt{K} = 2$ (N.° 379), e perciò razionale, e poichè pel (N.° 378) il 3 è il numero maggiore di tutte le radici della data, onde ne viene $b = 6$, colloco in luogo della x quantità

$$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3.$$

Avendosi quindi i risultati

$$-4, -\frac{51}{8}, -8, -\frac{65}{8}, -6, \frac{-7}{8}, 8,$$

osservo che fra questi esistono i soli due $\frac{-7}{8}$, 8, i quali si alternano nel segno. Dunque la data non avrà che una sola radice reale positiva, e questa esistendo tra i numeri $\frac{5}{2}$, 3, dai quali essi risultati sono prodotti, il numero 2 sarà l' intero a tal radice prossimamente inferiore.

Affi-

Affine ora di determinare i numeri inferiormente minori alle radici reali negative, ponendo $-x$ in luogo della x, riduciamo la data alla $x^3 - 5x + 4 = 0$. Trovandosi pel (N.° 378) essere 2 il numero maggiore di tutte le radici di quest' ultima Equazione, sostituiscansi in essa successivamente i numeri $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$, e vengansi così a determinare i risultati $4, \frac{13}{8}, 0, -\frac{1}{8}, 2$. Poichè il terzo di questi è zero, e fra i due $-\frac{1}{8}, 2$ si à un' alternazione di segno, ne segue, che il terzo numero sostituito, cioè il numero 1, sarà una radice della $x^3 - 5x + 4 = 0$, ed un' altra ne esisterà fra i due $\frac{3}{2}, 2$, della quale per conseguenza l' intero prossimamente maggiore sarà il secondo di essi, cioè il 2. Ciò dunque determinato, -1 sarà una radice negativa della data $x^3 - 5x - 4 = 0$, e la terza delle sue radici avrà per intero prossimamente inferiore il numero -2.

383. Vedesi facilmente che le sostituzioni da farsi delle quantità (*XIII*) nella (D) non sono giammai in numero $> nr + 1$, e però, che un tal numero è sempre limitato. Vedesi inoltre che il calcolo di queste sostituzioni potrà facilitarsi, se invece di eseguirle, come nel (N.° prec.), ponghiamo primieramente in luogo della x la quantità $\frac{x}{n}$, ossia se moltiplichiamo nella (D) il se-

 con-

condo termine per n, il terzo per n^2, il quarto per n^3, e così di seguito, e poscia trascurato il comun divisore n^m, poichè non si cerca che l' alternazione dei segni, se nella quantità, che risulta, collochiamo successivamente in vece della x i numeri 0, 1, 2, 3, 4, ec. Finalmente il nostro calcolo potrà agevolarsi ancora di più coll' ajuto delle serie, e ciò vedremo nell' esempio, che segue.

384. **Determinare gl' interi prossimamente inferiori alle radici della $x^3 - 28x + 56 = 0$.**

Essendo $\frac{1}{2}$ un numero minore di tutte le differenze fra le radici reali, e disuguali della data; dovremo per iscioglière il Problema sostituire in luogo della x i numeri successivi, $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$, ec., ovvero pel (N.° prec.) moltiplicato il -28 per 4, e il 56 per 8, dovremo sostituire nel ri-
(*XIV*) sultato $x^3 - 112x + 448$ invece della x i numeri 0, 1, 2, 3, 4, ec. Ora per vieppiù facilitare il calcolo, osservo che la quantità (*XIV*) altro non è che il termine generale di una serie a differenze terze costanti; dunque se cercherò le differenze 1.^{e}, le 2.^{e}, e le 3.^{e}, e se col mezzo di queste determinerò i termini successivi di detta serie; tali termini saranno appunto i risultati diversi, che verrebbero dalle sostituzioni sovraccennate. Suppongo pertanto successivamente $x =$ ai quattro numeri 0, 1, 2, 3, sostituisco in (*XIV*), e avutine i risul-

risultati (*XV*) 448, 337, 232, 139, determino da questi le differenze prime — 111, — 105, — 93, le seconde + 6, + 12, e la terza + 6; scrivo poscia in (*XVI*) in una prima linea la differenza 3.ª costante + 6, replicandola quante volte si vuole; colloco sotto del primo + 6 in una colonna verticale la prima delle differenze 2.ᵉ, cioè il + 6, la prima delle differenze 1.ᵉ, cioè il — 111, e il primo dei risultati (*XV*), cioè il 448. Ciò fatto, formo nella seconda riga la serie delle differenze 2.ᵉ, e la formo sommando ciascun suo termine precedente con il numero ad esso immediatamente superiore; formo col metodo istesso nella terza riga la serie delle differenze 1.ᵉ; e replicando nella quarta l' operazione medesima, otterremo finalmente i termini successivi della serie principale, ossia i risultati, che verrebbero dalla (*XIV*), facendo successivamente $x = 0, 1, 2, 3, 4$, ec. Poichè la 3.ª differenza 6 è positiva, e positivi sono tutti i termini della ottava colonna, vedesi che i termini, i quali si otterrebbero oltre questa, sarebbero tutti positivi, e perciò sarà inutile protrarre innanzi le serie. Ora nella quarta riga abbiamo due alternazioni di segno, e queste tra il sesto risultato + 13, e il settimo — 8, tra il settimo — 8, e l' ottavo + 7. Dunque dalla sostituzione dei numeri 5, 6, 7 nella (*XIV*), ossia dei numeri $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$ nel primo membro della data $x^3 - 28x + 56 = 0$ ottenendosi tre risultati prossimi

simi alternantisi nel segno; ne viene, che essa data avrà due radici reali positive, e una di queste esistente fra i numeri $\frac{5}{2}$, 3, e l'alrra fra i due 3, $\frac{7}{2}$, onde 2, 3 sarannno gli interi ad esse prossimamente inferiori.

Per trovare l' intero più prossimo all'altra radice reale negativa, porrei $-x$ in luogo della x, e opererei sulla $x^3 - 28x + 56 = 0$, come precedentemente (N.° 382).

$+6, +6, +6, +6, +6, +6,$
$+6, +6, +6, +$ ec.

(*XVI*) $+6, +12, +18, +24, +30, +36,$
$+42, +48, +54, +$ ec.

$-111, -105, -93, -75, -51, -21,$
$+15, +57, +105,$ ec.

$+448, +337, +232, +139, +64, +13,$
$-8, +7, +64,$ ec.

385. Dopo la determinazione dei primi quattro risultati (*XV*), affin di trovare gli altri non impiegandosi nella operazion precedente che delle semplici addizioni, vedesi quanto esso possa facilitare il calcolo. Che se l' Equazione data sia la (D); rappresentando il suo primo membro il termine generale di una serie a differenze *mesime* costanti; supposto successivamente $x = 0, 1, 2, 3, 4,$ ec., m, e trovati dalla (D) gli $m+1$ risultati corrispondenti; da questi determinerei le differenze 1.^{e}, le 2.^{e}, le 3.^{e} ec. fino alla *mesima*;

poscia

poscia, come nel (N.° prec.), formerei tutte le serie delle differenze *mesime*, delle $m-1$ *esime*, delle $m-2$ *esime*; e l' ultima di tali serie quella sarà, che ci somministra tutti i risultati, che verrebbero col sostituire nella (D) i numeri successivi 0, 1, 2, 3, 4, ec.. Allorchè poi giungeremo ad una colonna di numeri tutti positivi, potremo quì pure, come si è detto di sopra, arrestarci, poichè inutili diverrebbero tutti gli altri termini successivi.

386. Determinare per approssimazione il valore delle radici reali della (D).

Tolte dalla (D) le radici uguali, e chiamata α una delle sue radici reali, trovo pel (N.° 382) l' intero prossimamente inferiore ad essa α, e denominatolo p, suppongo $x = p + \frac{1}{y}$, sostituisco nella (D), e mi verrà pel (N.° 81) una Trasformata della forma

(*XVII*) $A' y^m + B' y^{m-1} + C' y^{m-2} + \text{ec.} = 0$. Poichè α è reale, e poichè $p < \alpha$, $p + 1 > \alpha$ (N.° 382), è chiaro dalla $x = p + \frac{1}{y}$, che per lo meno anche una radice della (*XVII*) dovrà essere reale, e maggiore della unità. Cerco in essa (*XVII*) l' intero prossimamente inferiore a tal radice reale, lo chiamo q, e fatto $y = q + \frac{1}{u}$, sostituisco nella (*XVII*), onde ne venga

(*XVIII*) $A'' u^m + B'' u^{m-1} + C'' u^{m-2} + \text{ec.} = 0$. Avendo

quì

quì pure la u almeno un valore reale, e > 1, determino, come sopra, l' intero inferiormente più vicino ad esso, lo denomino r, e sostituisco nella (*XVIII*) invece della u la quantità $r + \frac{1}{z}$; mi verrà ancor quivi un' Equazione

(*XIX*) $A''' z^m + B''' z^{m-1} + C''' z^{m-2} + \text{ec.} = 0$, in cui esistendo almeno una radice reale, e > 1, cerco l' intero prossimamente ad esso minore, lo chiamo s, e proseguo ad operare sempre nella maniera medesima.

Ciò fatto, sostituisco successivamente nelle Equazioni $x = p + \frac{1}{y}$, $y = q + \frac{1}{u}$, $u = r + \frac{1}{z}$, ec. in luogo della x, y, u, z, ec. i valori corrispondenti, e ci risulterà prossimamente

$$(XX)\ \alpha = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{ec.}}}}$$ valore da ridursi in fine pel (N.° 361) a frazione ordinaria.

387. Se α è razionale, la frazione continua (*XX*) dovrà essere finita, e quindi uno dei numeri p, q, r, s, ec. dovrà essere radice esatta della Equazione, che gli corrisponde. Ma se α è irrazionale, la (*XX*) andrà all' infinito, e nessuna delle Equazioni (*XVII*), (*XVIII*), (*XIX*), ec. avrà per radice esatta un numero intero.

388. Tra i due valori p, $p + 1$ od esiste la sola radice α, o ne esistono due, tre, ec. diverse.

Nel

Nel primo di questi casi io dico, che la ($XVII$) non potrà avere, che una sola radice reale positiva. Imperciocchè se ne avesse per esempio due, e tali fossero le y', y''; sostituite queste nella $x = p + \frac{1}{y}$ (N.° 386), ne verrebbero i risultati $p + \frac{1}{y'}$, $p + \frac{1}{y''}$ esprimenti amendue un valore reale della x; e per conseguenza tra i due numeri p, $p + 1$ non esisterebbe già una sola radice reale della (D), ma ne esisterebbero due contro la supposizione.

389. Quindi ne segue, che per determinare il numero q, basterà in quest' ultimo caso sostituire soltanto nel primo membro della ($XVII$) i numeri 1, 2, 3, 4, ec. fino a quelli, che ci danno consecutivamente due risultati di segno contrario. Lo stesso si dice rapporto alle Equazioni ($XVIII$), (XIX), ec.

390. Che se fra p, $p + 1$ ànno luogo le due radici reali α, β: allora la ($XVII$) avrà due radici reali positive y', y'', e per determinare gl' interi q', q'' ad esse inferiormente più prossimi converrà ricorrere al metodo dei (N.i 382, 384). Ora q', q'' o sono due numeri fra lor disuguali, o nò: se lo sono, le due supposizioni $y = q' + \frac{1}{u}$, $y = q'' + \frac{1}{u}$ condurranno a due Equazioni ($XVIII$) diverse, ciascuna delle quali avrà una sola radice

 reale

reale positiva (N.° 388), e su ciascuna di esse potrà per conseguenza agevolarsi il calcolo, come nel (N.° prec.). Ma se $q' = q''$, l' ipotesi allora di $y = q' + \frac{1}{u}$ dandoci una sola Equazione (*XVIII*), quest' ultima Equazione avrà due radici reali positive, e quindi la determinazione dei due numeri r', r'' non potrà ricevere quell' abbreviamento di calcolo del (N.° prec.). Simile abbreviamento però comincierà sempre ad aver luogo, e si proseguirà sempre, ogniqualvolta gl' interi r', r'', s', s'', ec. risultano disuguali.

Lo stesso si dice, se fra le p, $p+1$ esistono tre, quattro, o più radici reali della (D).

391. Sciogliere per approssimazione l' Equa-
(*XXI*) zione $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Determinato pel (N.° 379) essere l' unità il numero minore di tutte le differenze tra le radici reali della data, cerco pei (N.[i] 383, 384) gl' interi prossimamente inferiori alle sue radici reali positive. Trovando, che la (*XXI*) non à che una sola radice reale positiva, e che l' intero a questa inferiormente più prossimo si è il 2, suppongo $x = 2 + \frac{1}{y}$, sostituisco, e ridotta così la (*XXI*) alla $y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$, cerco l' intero inferiormente più vicino al valore real positivo della y (N.° 389), trovo essere questo il 10; faccio dunque $y'' = 10 + \frac{1}{u}$, e avuta la Trasfor-

mata

mata $61u^3-94u^2-70u-1=0$, determino l' intero prossimamente inferiore alla sua radice real positiva. Trovandosi tal intero $=1$, suppongo nuovamente $u=1+\frac{1}{z}$, onde scoprire nel modo istesso l' intiero minore, e più prossimo al valore reale positivo della z, e proseguire poscia il calcolo medesimo quanto a me piace. Ora da simili operazioni troviamo, che la serie di tali numeri interi è la seguente

$$2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, \text{ec.}$$

Dunque la radice real positiva della (*XXI*) sarà prossimamente

$$=2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+\text{ec.}}}}}}}}}};$$

e da questa frazione continua determinate pel (N.° 361) le successive frazioni ordinarie, avremo i rotti

(XXII) $\frac{2}{1}$, $\frac{21}{10}$, $\frac{23}{11}$, $\frac{44}{21}$, $\frac{111}{53}$, $\frac{155}{74}$, $\frac{576}{275}$, $\frac{731}{349}$, $\frac{1307}{624}$, $\frac{16415}{7837}$, ec. i quali vieppiù si accostano al vero valore della nostra radice (N.° 368). Il rotto $\frac{16415}{7837}$ differirà dal valore vero di essa radice meno della quantità $\frac{1}{(7837)^2} = \frac{1}{61418569} = 0,0000000163$ (N.° 367).

392. Nella maniera medesima cercheremo prossimamente il valore delle radici reali negative della (*XXI*) (N.° 382). Giacchè poi ciascuno delle frazioni (*XXII*) s'accosta al vero valore della nostra radice, quanto è mai possibile (N. 370); quindi si vede che il nostro metodo di approssimazione è preferibile agli altri tutti.

CAPO DECIMOTTAVO.

Della Soluzione per Serie delle Equazioni indeterminate.

393. Data una serie finita

$$(I) \quad m'\alpha + n', \; m''\alpha + n'', \; m'''\alpha + n''', \; m^{\text{IV}}\alpha + n^{\text{IV}}, \text{ ec.}$$

ove le quantità m', m'', m''', m^{IV}, ec. formino una serie decrescente, le altre n', n'', n''', n^{IV}, ec. abbiano un valore qualunque, e la α sia un numero incognito, si domanda di determinare questa α per modo che due, o più termini della data serie siano fra loro uguali, e maggiori degli altri.

Affine di sciogliere questo Problema, paragono il pri-

primo termine $m'\alpha+n'$ con ciascuno degli altri, e ricavatine i valori $\alpha = \frac{n''-n'}{m'-m''}, = \frac{n'''-n'}{m'-m'''},$ $= \frac{n^{iv}-n'}{m'-m^{iv}}, =$ ec., chiamo questi $\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3,$ ec., e supposto poscia il primo termine $m'\alpha+n'=\pi$, riduco la nostra serie alla forma

II) $\pi, \pi+(m''-m')(\alpha-\alpha 1), \pi+(m'''-m')(\alpha-\alpha 2),$ $\pi+(m^{iv}-m')(\alpha-\alpha 3)$, ec..

Ciò fatto supponghiamo $\alpha =$ alla più grande delle quantità $\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3$, ec., e collochiamo questo valore nella serie (I); è chiaro dalla serie ridotta (II), che il termine corrispondente a questa quantità più grande diverrà $= \pi$; gli altri tutti poi diverranno $< \pi$: imperciocchè a cagione di α avente per la ipotesi il valor massimo, e di $m' > m''$, m''', m^{iv}, ec. le quantità $(m''-m')(\alpha-\alpha 1)$, $(m'''-m')(\alpha-\alpha 2)$, $(m^{iv}-m')(\alpha-\alpha 3)$, ec. sono tutte negative. Scioglieremo dunque il Problema, attribuendo ad α il massimo dei valori $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$ ec.

Che se due, o più delle $\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3$, ec. sono uguali fra loro, e maggiori delle altre; si otterranno altrettanti termini uguali al primo π, e maggiori degli altri.

394. Sia per esempio $9\alpha-1, 7\alpha+2, 3\alpha-4, 2\alpha+5$ la serie data. Paragonando questa con la (I), poichè abbiamo

$m' = 9, m'' = 7, m''' = 3, m^{iv} = 2$

$n' = -1, n'' = 2, n''' = -4, n^{iv} = 5$, sarà

$\alpha 1 =$

$\alpha\,1 = \frac{n'' - n'}{m' - m''} = \frac{3}{2}$, $\alpha\,2 = \frac{n''' - n'}{m' - m'''} = -\frac{3}{6}$,

$\alpha\,3 = \frac{n^{\prime v} - n'}{m' - m^{\prime v}} = \frac{6}{7}$. Ora essendo $\alpha\,1 = \frac{3}{2}$ il massimo de' risultati $\alpha\,1$, $\alpha\,2$, $\alpha\,3$, suppongo $\alpha = \frac{3}{2}$, e metto questo valore nella serie proposta: risultando esso perciò, $\frac{25}{2}$, $\frac{25}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{16}{2}$, sciolto avremo il Problema, poichè col supporre $\alpha = \frac{3}{2}$, abbiamo ridotta la serie ad avere i primi due termini uguali, e maggiori degli altri.

Se la serie data sia la

$6\alpha - 13$, $5\alpha - 10$, $4\alpha + 7$, $3\alpha - 14$, $2\alpha + 27$, trovandosi $\alpha\,1 = 3$, $\alpha\,2 = 10$, $\alpha\,3 = -\frac{1}{3}$, $\alpha\,4 = 10$, col fare $\alpha = 10$, risulteranno fra loro uguali, e maggiori degli altri il primo, il terzo, e il quinto termine, come infatti si vede nei risultati 47, 40, 47, 16, 47.

395. L' incognita α, oltre il valore precedente, altri aver ne potrebbe capaci di sciogliere il nostro Problema; cerchiamo ora di determinarli.

Attribuendo nella (*II*) ad α un valore più grande di tutte le quantità $\alpha\,1$, $\alpha\,2$, $\alpha\,3$, ec., i termini della serie diverranno tutti $< \pi$, e per conseguenza non potrà esistere alcun numero maggiore di ciascuna delle $\alpha\,1$, $\alpha\,2$, $\alpha\,3$, ec., il quale renda due, o più termini della (*I*) uguali fra loro, e maggiori degli altri. Se dunque esistono altri valori della α atti a sciogliere il nostro Problema, questi dovranno essere tutti minori della massima delle quantità $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, ec.

Sia per esempio $\alpha 6$ questa massima quantità, o se due, o più delle $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, ec. sono maggiori delle altre, e $= \alpha 6$, sia $\alpha 6$ l' ultima fra queste, e sia $\pi + (m^{VII} - m^{I})(\alpha - \alpha 6)$ il termine ad essa corrispondente. Ciò presupposto, se si attribuiscano ad α dei valori $< \alpha 6$, a cagion della serie $m^{II} - m^{I}$, $m^{III} - m^{I}$, $m^{IV} - m^{I}$, ec. sempre decrescente, è facile a vedersi, che tutti i termini, i quali precedono il termine $\pi + (m^{VII} - m^{I})(\alpha - \alpha 6)$, risultano minori di esso. Dunque potremo trascurarli, e tener conto solamente di quei, che lo seguono.

Ora il termine $\pi + (m^{VII} - m^{I})(\alpha - \alpha 6)$ nella (I) altro non è che $m^{VII}\alpha + n^{VII}$, e quei, che seguono, sono $m^{VIII}\alpha + n^{VIII}$, $m^{IX}\alpha + n^{IX}$, ec.: dovendosi adunque per le ulteriori soluzioni del Problema considerare soltanto questi termini, replicherò prima su di essi quanto si è operato nel (N.° 393), e avrò così una seconda soluzione. Per avere poi tutte le altre, ripeterò sempre su i termini, che restano successivamente, le operazioni medesime sino alla fine della serie.

396. Pertanto la soluzione completa del presente Problema (N.° 393) riducesi al metodo seguente. Si uguaglia successivamente il primo termine della serie con ciascuno dei susseguenti, e fra i valori, che acquista α, il maggiore sciorrà il

Pro-

Problema. Quindi partendo dall' ultimo dei termini, che divengon massimi, uguagliasi questo a ciascuno di quelli, che seguono, e tra i valori, che acquista perciò α, il più grande scioglierà nuovamente il Problema. Cominciando in seguito dall' ultimo di questi termini, che divengono in secondo luogo uguali fra loro, e maggiori degli altri, uguaglio questo con gli ulteriori, e ritengo il valore più grande, che da ciò ottienesi per α, poichè questo pure soddisfa al Poblema, e così di seguito.

Abbiasi per esempio la serie

$7\alpha - 5, 6\alpha + 2, 5\alpha + 9, 3\alpha - 6, 2\alpha, \alpha + 4, 0.$

Dal paragone del primo con gli altri termini si ricavano pel valore di α i numeri $7, 7, -\frac{1}{4}, 1, \frac{9}{6}, \frac{5}{7}$, e fra questi il 7 risultato dal paragonare il primo col secondo, e col terzo termime, è il più grande. Poseguo adunque, trascurati i primi termini, a paragonare il terzo $5\alpha + 9$ con gli ulteriori; e per α ottenendosi i numeri $-\frac{15}{2}, -3, -\frac{5}{4}, -\frac{9}{5}$, il penultimo $-\frac{5}{4}$ è maggiore degli altri: paragono pertanto il penultimo termine $\alpha + 4$ con l' ultimo, e per α finalmente ci risulta il solo valore -4. Dunque α per la soluzione del nostro Problema potrà avere tre valori diversi, cioè i tre $7, -\frac{5}{4}, -4$, e ne verranranno quindi tre soluzioni, come in realtà si vede dai risultati, che seguono provenienti dalle sostituzioni successive dei numeri trovati in luogo della α

1.° $44, \quad 44, \quad 44, \quad 15, \quad 14, \quad 11, \quad 0$

2.° $-\frac{55}{4}, -\frac{22}{4}, \frac{11}{4}, -\frac{39}{4}, +\frac{10}{4}, \frac{11}{4}, 0$

3.° $-33, -22, -11, -18, -8, \quad 0, \quad 0$

397. Se al contrario nella data serie (I) si volesse determinare la α per modo, che due o più dei termini di essa divenissero uguali fra loro, e minori degli altri; converrebbe operare affatto, come nei (N.[i] prec.[i]), attribuendo però ad α i più piccoli fra i valori, che vengono per essa successivamente determinati.

Nella serie dell' esempio precedente vedesi, che fra i primi risultati $-\frac{1}{4}$ è il più piccolo, e che questo corrisponde al quarto termine $3\alpha-6$. Paragono adunque questo quarto termine con i seguenti, e fra i numeri, che ne vengano, 6, 5, 2, l' ultimo 2 essendo il minore, il nostro Problema avrà due soluzioni, mentre cioè si faccia

$\alpha = -\frac{1}{4}$, oppure $= 2$, diventando la serie nel caso

1.° $-\frac{27}{4}, \frac{2}{4}, \frac{31}{4}, -\frac{27}{4}, -\frac{2}{4}, \frac{15}{4}, 0$, e nel

2.° $9, \quad 14, \quad 19, \quad 0, \quad 4, \quad 6, \quad 0.$

398. Che se finalmente nella (I) le quantità m', m'', m''', m^{IV}, ec. formano una serie crescen-

 te

te per modo che $m' < m'' < m''' < m^{IV} <$ ec.; da quanto si è detto, è facile a vedersi, che in allora fra i successivi valori della α i più piccoli quelli sono, che sciolgono il Problema del (N.° 393), e i più grandi l' altro del (N.° 397).

399. Suppongo già noto, che le quantità infinitamente piccole svaniscono rapporto alle finite, che le infinitesime, le finite, e le infinite di grado inferiore scompariscono rapporto alle infinite di grado superiore, e che finalmente le infinitamente piccole di grado superiore svaniscono riguardo alle infinitesime di grado inferiore. Il carrattere ∞ ci rappresenti l' infinito.

400. Si domanda quale divenga un' Equazione algebraica indeterminata $Z = f(x)(y) = 0$ nella supposizione di x infinita.

Qualunque siasi la supposta $f(x)(y) = 0$, è facile a vedersi, che si può sempre ridurre alla forma

$$(Y)\quad \left.\begin{array}{l} (A' x^{n'} + B' x^{p'} + C' x^{q'} + \text{ec.})\, y^{m'} + \\ (A'' x^{n''} + B'' x^{p''} + C'' x^{q''} + \text{ec.})\, y^{m''} + \\ (A''' x^{n'''} + B''' x^{p'''} + C''' x^{q'''} + \text{ec.})\, y^{m'''} + \\ (A^{IV} x^{n^{IV}} + B^{IV} x^{p^{IV}} + C^{IV} x^{q^{IV}} + \text{ec.})\, y^{m^{IV}} + \end{array}\right| = 0$$

ec., in cui gli esponenti

m', m'', m''', m^{IV}, ec.

n', p', q', ec.

n'', p'', q'', ec.

n''', p''', q''', ec.

n^{IV}, p^{IV}, q^{IV}, ec. sian tutti positivi, e formino tante serie decrescenti.

Ciò

Ciò dunque eseguito facciamo x infinita. A tale supposizione dovendo pel (N.° prec.) rapporto ad $A' x^{n'}$ svanire i termini $B' x^{p'}$, $C' x^{q'}$, ec., rapporto ad $A'' x^{n''}$ svanire i termini $B'' x^{p''}$, $C'' x^{q''}$, ec., e così di seguito, la (Y) si cangierà nella

III) $A' x^{n'} y^{m'} + A'' x^{n''} y^{m''} + A''' x^{n'''} y^{m'''} + A^{IV} x^{n^{IV}} y^{m^{IV}} + \text{ec.} = 0.$

Sia $y = L x^{\alpha}$, essendo L, α due quantità da determinarsi; sostituendo, otterremo

IV) $A' L^{m'} x^{m'\alpha + n'} + A'' L^{m''} x^{m''\alpha + n''} + A''' L^{m'''} x^{m'''\alpha + n'''} + A^{IV} L^{m^{IV}} x^{m^{IV}\alpha + n^{IV}} + \text{ec.} = 0.$ Ora anche nelle due Equazioni (*III*), (*IV*) non devono restare, che i termini, i quali contengono gl' infiniti dello stesso massimo grado (N.° prec.); converrà dunque determinare, quali essi siano.

Rifletto primieramente, che nella (*III*) non potrà giammai succedere, che rimanga un solo termine, per esempio il primo $A' x^{n'} y^{m'}$: imperciocchè, se ciò fosse, l' Equazione si ridurrebbe ad $A' x^{n'} y^{m'} = 0$, e quindi, prescindendo dai segni, il suo massimo termine (N.° prec.) sarebbe zero, il che evidentemente è un assurdo. Dovendone dunque rimanere in essa più di uno, ne dovrà rimanere più d' uno anche nella (*IV*); e quelli è chiaro, che rimarranno, nei quali gli esponenti della x sono uguali fra loro, e maggiori degli altri.

Rifletto in secondo luogo, che in conseguenza della supposizione di $y = L x^{\alpha}$ due sono le indeterminate nuove introdotte nella (*IV*), cioè le due L, α; e che alle condizioni della y soddisfacendo

 la

la prima di esse, la seconda può sembrare determinabile ad arbitrio; ma entrando questa seconda nella formazione degli esponenti $m'\alpha + n'$, $m''\alpha + n''$, $m'''\alpha + n'''$, $m^{iv}\alpha + n^{iv}$, ec., e per quanto abbiamo ora detto, due per lo meno di questi dovendo essere uguali fra loro, e maggiori degli altri, non potrà essa α già avere un valore qualunque, ma dovrà avere quello soltanto, il quale soddisfa a quest' ultima condizione.

Cerco pertanto pei (N.[i] 393, 395) quel valore della α, il quale è capace di rendere due o più termini della serie $m'\alpha + n'$, $m''\alpha + n''$, $m'''\alpha + n'''$, ec. fra loro uguali, e più grandi degli altri, e questo ci condurrà alla soluzione del nostro Problema. Imperciocchè chiamato α' un simil valore, e supposto, che per mezzo di esso gli esponenti, per esempio $m'\alpha + n'$, $m'''\alpha + n'''$, $m''\alpha + n^{vii}$, quei siano, che divengono uguali fra loro, e maggiori degli altri; sostituendo, la (*IV*) diventerà $A' L^{n'} x^{m'\alpha' + n'} + A''' L^{m'''} x^{m'''\alpha' + n'''} + A'' L^{m''} x^{m^{vii}\alpha' + m^{vii}} = o$; ma anche la $y = L x^{\alpha}$ diviene $y = L x^{\alpha'}$. Dunque se porrò in quest' ultima Equazione in luogo di $L x^{\alpha}$ la indeterminata y, essa cangiandosi nella $A' x^{n'} y^{m'} + A''' x^{n'''} y^{m'''} + A^{vii} x^{n^{vii}} y^{m''} = o$, avremo così ottenuta un' Equazione fra le x, y, in cui tutti i termini sono infiniti dello stesso grado, e quella per conseguenza, a cui per la ipotesi di $x = \infty$ riducesi la data $Z = o$.

401. I valori della α esser ponno più di uno

(N.°

(N.° 395): dunque replicando su ciascuno di essi quanto si è ora detto rapporto ad α, vedesi, che saranno eziandio più di una le Equazioni, che per la fatta supposizione nascono da $Z = 0$; e tante queste saranno, quanti sono i valori accennati della α.

Sia per esempio

$x^2 y^4 + a x y^4 - 5 x^3 y^3 + 3 a^2 x y^3 + a x^4 y - 3 a x^5 - 5 x^2 b^4 = 0$ l' Equazione data. Per determinare quale essa diventi per la supposizione di $x = \infty$, la scrivo primieramente, come quì sotto

$$\left.\begin{array}{l} (x^2 + a x)\, y^4 + \\ (-5 x^3 + 3 a^2 x)\, y^3 + \\ \quad a x^4 y \\ -3 a x^5 - 5 a^2 b^4 \end{array}\right| = 0,$$

e svanendo in esso i termini $a x$, $3 a^2 x$, $-5 a^2 b^4$ rapporto ai corrispondenti x^2, $-5 x^3$, $-3 a x^5$, la riduco quindi alla

$x^2 y^4 - 5 x^3 y^3 + a x^4 y - 3 a x^5 = 0$.

Suppongo $y = L x^\alpha$, sostituisco, e ottenuta la

$L^4 x^{4\alpha+2} - 5 L^3 x^{3\alpha+3} + a L x^{\alpha+4} - 3 a x^5 = 0$,

cerco pei (N.ⁱ 393, 395) quei valori della α, i quali sono atti a rendere uguali fra loro, e maggiori degli altri, due o più degli esponenti

$4\alpha + 2$, $3\alpha + 3$, $\alpha + 4$, 5.

Ora trovo essere due questi valori, e aversi perciò $\alpha' = 1$, $\alpha'' = \frac{2}{3}$, sostituendo pertanto, e cancellando i termini di grado inferiore, dalla precedente otterrò le due Equazioni

$L^4 x^6 - 5 L^3 x^6 = o$, $- 5 L^3 x^5 - 3 a x^5 = o$; ma dalla $y = L x^\alpha$ ottengo ancora in corrispondenza $y = L x$, $y = L x^{\frac{2}{3}}$; dunque sostituendo nelle rispettive Equazioni, ricaveremo $x^2 y^4 - 5 x^3 y^3 = o$, $- 5 x^3 y^3 - 3 a x^5 = o$, ossia $y - 5 x = o$, $5 y^3 + 3 a x^2 = o$; e queste saranno le Equazioni, a cui convertesi la data per la supposizione di $x = \infty$.

402. Si domanda quali termini della $Z = o$ divengono infiniti dello stesso grado sotto un determinato valore della α.

Supponghiamo che si ritrovi $\alpha = \frac{l}{k}$, e sia questa frazione già ridotta alla sua espressione più semplice: ciò posto, i termini, che si domandano, io dico esser quelli, i quali formano la serie

(V) $a' x^g y^h + b' x^{g+l} y^{h-k} + c' x^{g+2l} y^{h-2k} + d' x^{g+3l} y^{h-3k}$ $+$ ec.; e qualunque altro in essa non compreso dovrà nella nostra ipotesi diventare un infinito di grado diverso. Imperciocchè sostituendo nella (V) invece della y il valore $L x^{\frac{l}{k}}$, tal serie diviene

$(a' L^h + b' L^{h-k} + c' L^{h-2k} + d' L^{h-3k} + \text{ec.}) x^{\frac{hl}{k}+g}$,

e in questo risultato tutti i termini sono evidentemente dello stesso grado $\frac{hl}{k} + g$.

Ci esprima $P x^q y^p$ un altro termine della $Z = o$ non contenuto nella serie (V).

Poi-

Poichè per la ipotesi di $y = L x^{\frac{l}{k}}$, esso diventa $P L^{p} x^{\frac{lp}{k}+q}$, se fosse un infinito del grado istesso dei precedenti, dovrebbe risultare $\frac{bl}{k} + g = \frac{pl}{k} + q$, e quindi avendosi $\frac{q-g}{b-p} = \frac{l}{k}$, le due quantità $q-g$, $b-p$ dovrebbero essere equimultiple delle due l, k, e perciò avrebbesi $q-g = nl$, $b-p = nk$, rappresentando n un numero intero qualunque. Ora da queste due Equazioni ricavo $q = g + nl$, $p = b - nk$. Dunque risultando con la sostituzione $P x^{q} y^{p} = P x^{g+nl} y^{b-nk}$, verrebbe questo termine ad essere compreso nella serie precedente; ma ciò è contro la suppposizione. Dunque ec.

403. Determinare nella nostra ipotesi il valore del coefficiente L.

Supposto $\alpha = \frac{l}{k}$, e quindi pei (N.[i] prec.) convertitasi la $Z = 0$ nella $(V) = 0$, pongo in quest' ultima Equazione $L x^{\frac{l}{k}}$ in luogo della y. Diventando essa perciò
$(a' L^{b} + b' L^{b-k} + c' L^{b-2k} + d' L^{b-3k} + \text{ec.}) x^{\frac{bl}{k}+g}$
$= 0$, la divido per $x^{\frac{bl}{k}+g}$, e avrò così la
(VI) $a' L^{b} + b' L^{b-k} + c' L^{b-2k} + d' L^{b-3k} + \text{ec.} = 0$,
Equazione in L, da cui potrò avere evidentemente la soluzione del Problema. Poichè b è il grado

do di quest' ultima Equazione, b saranno i valori della L.

Nell' esempio del (N.° 401), allorchè $\alpha = 1$, dalla $y - 5x = 0$ si ricava $L - 5 = 0$, e però $L = 5$, e mentre $\alpha = \frac{2}{3}$, dalla $5y^3 + 3ax^2 = 0$ ottienesi $5L^3 + 3a = 0$, e quindi $L = -\mu \sqrt[3]{\frac{3a}{5}}$, rappresentando μ una qualunque delle tre radici cubiche della unità.

404. Sciogliere il Problema del (N.° 400) nella supposizione di x infinitamente piccola.

Ridotta, come nel numero accennato, la $Z = 0$ alla (Y), ove gli esponenti m', m'', m''', m^{iv}, ec. formino bensì una serie decrescente, ma gli altri

$$\begin{array}{l} n', \; p', \; q', \; \text{ec.} \\ n'', \; p'', \; q'', \; \text{ec.} \\ n''', \; p''', \; q''', \; \text{ec.} \\ \quad \text{ec.} \end{array}$$

formino tante serie crescenti, suppongo x infinitesimo; essa $Z = 0$ pel (N.° 399) si cangierà nella (*III*), e fatto $y = Lx^{\alpha}$, otterrò la (*IV*). Anche in questo caso quantunque nelle (*III*), (*IV*) vadano a svanire altri termini, pure ne dovrà sempre rimanere più di uno; imperciocchè supposto $x = \frac{1}{z}$, e sostituito nella $Z = 0$, e nella (*III*), queste diventano due Equazioni fra le y, z, venendo la seconda da essere derivata dalla prima per la ipotesi di $z = \infty$. Ora, mentre $z = \infty$, l' ultima Equazione

sul-

sultante deve sempre contener più di un termine (N.° 420): dunque la supposizione di x infinita equivalendo perfettamente all' altra di x infinitesima, anche in quest' ultima supposizione dovrà nella Equazion, che risulta, e però nella nostra (III) sussistere più di un termine. Ciò dunque essendo, pel (N.° 397) cerco quei valori della α, i quali sono atti a rendere due, o più termini della serie (I) uguali fra loro, e minori degli altri, e questi sostituiti opportunamente ci condurranno, come nel (cit. N.° 400), e nel (N.° 401), alla soluzion del Problema.

Se la $Z = 0$ altro non sia che l' Equazione proposta ad esempio nel (N.° 401); scritta essa, come quì sotto

$$\left.\begin{array}{l}(a x + x^2) y^4 + \\ (3 a^2 x - 5 x^3) y^3 + \\ a x^4 y + \\ - 5 a^2 b^4 - 3 a x^5\end{array}\right| = 0,$$

e per la ipotesi di x infinitesima ridotta in seguito alla $a x y^4 + 3 a^2 x y^3 + a x^4 y - 5 a^2 b^4 = 0$, e quindi alla $a L x^{4\alpha+1} + 3 a^2 L^3 x^{3\alpha+1} + a L x^{\alpha+4} - 5 a^2 b^4 = 0$, determino quei valori di α, che sono capaci di fare uguali fra loro, e minori degli altri due o più termini della serie $4\alpha + 1$, $3\alpha + 1$, $\alpha + 4$, 0. Ora pel (N.° 397.) ritrovo avere α il solo valore a ciò opportuno $-\frac{1}{4}$. Dunque con la sostituzione avrò $a^4 L^4 x^0 - 5 a^2 b^4 = 0$, e tornando a sostituire in luogo di $L x^0$ la y ci verrà l' Equazione

$a x y^4 - 5 a^2 b^4 = 0$, ovvero $x y^4 - 5 a b^4 = 0$, e questa sarà la richiesta dal Problema.

405. Nella ipotesi di x infinitamente piccola gl' infinitesimi dello stesso grado si dimostra affatto, come nel (N° 402), che restano tutti compresi nella serie $a x^g y^h + b x^{g+l} y^{h-k} + c x^{g+2l} y^{h-2k} + d x^{g+3l} y^{h-3k} +$ ec.; e il Problema del (N.° 403) viene scielto quì pure, come nello stesso (N.° 403).

406. Determinare quale diventi la funzione (V) per la supposizione di $y = \mathrm{L} x^\alpha + u$, essendo $\alpha = \frac{l}{k}$.

Supposto $\mathrm{L} x^\alpha = r$ pongo nella (V) in luogo della y la quantità $r + u$, e avremo il risultato

$$\begin{aligned}
&(a x^g r^h + b x^{g+l} r^{h-k} + c x^{g+2l} r^{h-2k} + d x^{g+3l} r^{h-3k} \\
&\quad + e x^{g+4l} r^{h-4k} + \text{ec.}) + \\
&(h a x^g r^{h-1} + (h-k) b x^{g+l} r^{h-k-1} + (h-2k) \\
&\quad c x^{g+2l} r^{h-2k-1} + (h-3k) d x^{g+3l} r^{h-3k-1} + \text{ec.}) u + \\
&\left(\frac{h(h-1)}{2} a x^g r^{h-2} + \frac{(h-k)(h-k-1)}{2} b x^{g+l} r^{h-k-2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{(h-2k)(h-2k-1)}{2} x^{g+2l} r^{h-2k-2} + \text{ec.}\right) u^2 + \\
&\left(\frac{h(h-1)(h-2)}{2 \cdot 3} a x^g r^{h-3} + \frac{(h-k)(h-k-1)(h-k-2)}{2 \cdot 3}\right. \\
&\quad \left. b x^{g+l} r^{h-k-3} + \text{ec.}\right) u^3 + \\
&\quad \text{ec.}
\end{aligned}$$

Colloco ora invece di r la quantità Lx^{α}, e a cagione di $\alpha = \frac{l}{k}$ vedremo facilmente, che la (V) si cangierà così nella

$$(aL^{b} + bL^{b-k} + cL^{b-2k} + dL^{b-3k} + eL^{b-4k} + \text{ec.})\, x^{b\alpha+g} +$$

$$(baL^{b-1} + (b-k)\,bL^{b-k-1} + (b-2k)\,cL^{b-2k-1} + (b-3k)\,dL^{b-3k-1} + \text{ec.})\, x^{(b-1)\alpha+g}u +$$

$$\left(\frac{b(b-1)}{2}aL^{b-2} + \frac{(b-k)(b-k-1)}{2}bL^{b-k-2} + \frac{(b-2k)(b-2k-1)}{2}cL^{b-2k-2} + \text{ec.}\right) x^{(b-2)\alpha+g}u^{2} +$$

$$\left(\frac{b(b-1)(b-2)}{2\cdot 3}aL^{b-3} + \frac{(b-k)(b-k-1)(b-k-2)}{2\cdot 3}bL^{b-k-3} + \text{ec.}\right) x^{(b-3)\alpha+g}u^{3} +$$

ec.

e perciò, chiamati F, G, H, I, ec. questi coefficienti, essa (V) diventerà

$$Fx^{b\alpha+g} + Gx^{(b-1)\alpha+g}u + Hx^{(b-2)\alpha+g}u^{2} + Ix^{(b-3)\alpha+g}u^{3} + \text{ec.}$$

407. Qualunque siasi la $Z = 0$ (N.° 400), e qualunque le due quantità k, l, vedesi facilmente, che può essa sempre ridursi alla forma

$$
(VII)\quad \left.\begin{array}{l}
a' \, x^{g'} y^{h'} + b' \, x^{g'+l} y^{h'-k} + \\
\quad c' \, x^{g'+2l} y^{h'-2k} + d' \, x^{g'+3l} y^{h'-3k} + \text{ec.} \\
+ a'' \, x^{g''} y^{h''} + b'' \, x^{g''+l} y^{h''-k} + \\
\quad c'' \, x^{g''+2l} y^{h''-2k} + d'' \, x^{g''+3l} y^{h''-3k} + \text{ec.} \\
+ a''' \, x^{g'''} y^{h'''} + b''' \, x^{g'''+l} y^{h'''-k} + \\
\quad c''' \, x^{g'''+2l} y^{h'''-2k} + d''' \, x^{g'''+3l} y^{h'''-3k} + \text{ec.} \\
\qquad\qquad \text{ec.}
\end{array}\right| = 0.
$$

Per tal modo se $a x y^3 + b y^3 - c x^2 y^2 + d x y^2 + a x^3 y - f x^2 y + i y + g x y - f x^4 + b x^2 + d = 0$ sia l' Equazione data; avendosi $g' = 1$, $h' = 3$, $l = 1$, $k = 1$, $g'' = 0$, $h'' = 3$, $g''' = 1$, $h''' = 1$, $g^{iv} = 0$, $h^{iv} = 1$, $g^{v} = 0$, $h^{v} = 0$, essa si ridurrà alla forma

$$
\left.\begin{array}{l}
a x y^3 - c x^2 y^2 + a x^3 y - f x^4 + \\
b y^3 + d x y^2 - f x^2 y + \\
g x y + b x^2 + \\
i y + \\
d
\end{array}\right| = 0.
$$

Ora se venga richiesto di sostituire nella (*VII*) in luogo della y la quantità $L x^{\alpha} + u$, essendo $\alpha = \frac{l}{k}$, fatta l' operazione del (N.° 406), è chiaro che otterremo l' Equazione

$$(VIII)\qquad \left.\begin{array}{l} (F' x^{b'\alpha+g'} + F'' x^{b''\alpha+g''} + \\ \qquad F''' x^{b'''\alpha+g'''} + \text{ec.}) + \\ (G' x^{(b'-1)\alpha+g'} + G'' x^{(b''-1)\alpha+g''} + \\ \qquad G''' x^{(b'''-1)\alpha+g'''} + \text{ec.})\, u + \\ (H' x^{(b'-2)\alpha+g'} + H'' x^{(b''-2)\alpha+g''} + \\ \qquad H''' x^{(b'''-2)\alpha+g'''} + \text{ec.})\, u^2 + \\ (I' x^{(b'-3)\alpha+g'} + I'' x^{(b''-3)\alpha+g''} + \\ \qquad I''' x^{(b'''-3)\alpha+g'''} + \text{ec.})\, u^3 + \\ \qquad\qquad \text{ec.} \end{array}\right| = 0,$$

in cui, apponendo gli apici opportuni, sarà

$$(IX)\qquad \begin{array}{l} F = a L^{b} + b L^{b-k} + c L^{b-2k} + d L^{b-3k} + e L^{b-4k} \\ \qquad + \text{ec.} \\ G = b\, a L^{b-1} + (b-k)\, b L^{b-k-1} + (b-2k) \\ \qquad c L^{b-2k-1} + (b-3k)\, d L^{b-3k-1} + \text{ec.} \\ H = \dfrac{b(b-1)}{2}\, a L^{b-2} + \dfrac{(b-k)(b-k-1)}{2}\, b L^{b-k-2} \\ \qquad + \dfrac{(b-2k)(b-2k-1)}{2}\, c L^{b-2k-2} + \text{ec.} \\ I = \dfrac{b(b-1)(b-2)}{2\cdot 3}\, a L^{b-3} \\ \qquad + \dfrac{(b-k)(b-k-1)(b-k-2)}{2\cdot 3}\, b L^{b-k-3} + \text{ec.} \\ \qquad\qquad \text{ec.}, \end{array}$$

e se facciamo

$b'\alpha + g' = \pi'$, $b''\alpha + g'' = \pi''$, $b'''\alpha + g''' = \pi'''$, ec., la precedente (*VIII*) diverrà

(F' $x^{\pi'}$

$$(X)\ \left.\begin{array}{l} (F' x^{\pi'} + F'' x^{\pi''} + F''' x^{\pi'''}) + \\ (G' x^{\pi'-\alpha} + G'' x^{\pi''-\alpha} + G''' x^{\pi'''-\alpha} + ec.)\, u + \\ (H' x^{\pi'-2\alpha} + H'' x^{\pi''-2\alpha} + H''' x^{\pi'''-2\alpha} + \\ \quad ec.)\, u^2 + \\ (I' x^{\pi'-3\alpha} + I'' x^{\pi''-3\alpha} + I''' x^{\pi'''-3\alpha} + \\ \quad ec.)\, u^3 + \\ \qquad ec., \end{array}\right| = 0$$

ossia, chiamati $P1$, $Q1$, $R1$, $S1$, ec. questi coefficienti della u, diverrà

$$(X)\ P1 + Q1\,u + R1\,u^2 + S1\,u^3 + ec. = 0.$$

408. Qualunque esponente della x in $P1$, prescindendo dagli apici, vedesi che viene espresso da π; qualunque esponente della x in $Q1$ rappresentato da $\pi - \alpha$; qualunque esponente in $R1$, $S1$, ec. viene rispettivamente espresso da $\pi - 2\alpha$, $\pi - 3\alpha$, ec., e in generale gli esponenti della x in tutti i coefficienti della (X) vengono indicati da $\pi - f\alpha$, nascendo essi da tal formola, col fare successivamente $f1 = 0, 1, 2, 3$, ec., e col porre in luogo della π i valori π', π'', π''', ec.

409. Facciasi nella (X) $u = Mx^{\beta} + z$; sostituendo ne verrà la Trasformata

$$(XI)\ \left.\begin{array}{l} (P1 + Q1\,M x^{\beta} + R1\,M^2 x^{2\beta} + S1\,M^3 x^{3\beta} \\ \quad + ec.) + \\ (Q1 + 2\,R1\,M x^{\beta} + 3\,S1\,M^2 x^{2\beta} + ec.)\, z + \\ (R1 + 3\,S1\,M x^{\beta} + ec.)\, z^2 + \\ (S1 + ec.)\, z^3 + \\ \quad ec., \end{array}\right| = 0$$

ovvero chiamati $P2$, $Q2$, $R2$, $S2$, ec. questi diversi coefficienti avremo

$(XI)\ P\,2 + Q\,2\,z + R\,2\,z^2 + S\,2\,z^3 + \text{ec.} = 0.$

Poichè $P\,2 = P\,1 + M\,Q\,1\,x^{\beta} + M^2\,R\,1\,x^{2\beta} + M^3\,S\,1\,x^{3\beta} + \text{ec.}$, dal (N.° 408) è chiaro, che l' espression generale dell' esponente della x in $P\,2$ sarà $\pi - f\,1\,\alpha + f\,1\,\beta$; e quando $f\,1 = 0$, da questa formola nascono gli esponenti della x in $P\,1$; quando $f\,1 = 1$, ottengonsi gli esponenti della x in $M\,Q\,1\,x^{\beta}$; e così in progresso.

Essendo $Q\,2 = Q\,1 + 2\,M\,R\,1\,x^{\beta} + 3\,M^2\,S\,1\,x^{2\beta} + \text{ec.}$, in egual modo vedremo, che in questo coefficiente la x viene generalmente elevata ad un grado $\pi - (f\,1 + 1)\,\alpha + f\,1\,\beta$. Così in $R\,2$ si troverà essa x innalzata ad un grado $\pi - (f\,1 + 2)\,\alpha + f\,1\,\beta$, in $S\,2$ ad un grado $\pi - (f\,1 + 3)\,\alpha + f\,1\,\beta$; e in generale in uno qualunque dei coefficienti della (X) l' espressione del grado della x sarà $\pi - (f\,1 + f\,2)\,\alpha + f\,1\,\beta$, espressione, nella quale dovran porsi successivamente, e separatamente in luogo di amendue le lettere $f\,1$, $f\,2$ i numeri 0, 1, 2, 3, ec., e in luogo della π le quantità π', π'', π''', ec.

410. Ponghiamo nuovamente nella (XI) $z = N\,x^{\gamma} + t$; avremo la Trasformata

$$(XII)\ \left.\begin{array}{l} (P\,2 + Q\,2\,N\,x^{\gamma} + R\,2\,N^2\,x^{2\gamma} + S\,2\,N^3\,x^{3\gamma} \\ \quad + \text{ec.}) + \\ (Q\,2 + 2\,R\,2\,N\,x^{\gamma} + 3\,S\,2\,N^2\,x^{2\gamma} + \text{ec.})\,t + \\ (R\,2 + 3\,S\,2\,N\,x^{\gamma} + \text{ec.})\,t^2 \\ (S\,2 + \text{ec.})\,t^3 + \\ \text{ec.} \end{array}\right| = 0$$

ossia, espressi per $P\,3$, $Q\,3$, $R\,3$, $S\,3$, ec. i coeffi-

coefficienti diversi, si otterrà

(*XII*) $P3 + Q3\,t + R3\,t^2 + S3\,t^3 + \text{ec.} = 0$.

Cercando quì pure di determinare l' esponente della x in uno qualsivoglia dei coefficienti: con raziocinio simile ai passati (N.[i] 408, 409) non difficilmente vedremo, che l' esponente della x in $P3$ viene indicato da $\pi - (f1 + f2)\alpha + f1\beta + f2\gamma$, che un tale esponente in $Q3$ è rappresentato da $\pi - (f1 + f2 + 1)\alpha + f1\beta + f2\gamma$, in $R3$ da $\pi - (f1 + f2 + 2)\alpha + f1\beta + f2\gamma$, in $S3$ da $\pi - (f1 + f2 + 3)\alpha + f1\beta + f2\gamma$, e generalmente in un coefficiente qualunque da $\pi - (f1 + f2 + f3)\alpha + f1\beta + f2\gamma$, attribuendo, come alle lettere $f1$, $f2$ (N.[i] 408, 409), così alla $f3$ successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ec.

411. Proseguendo in modo uguale a supporre $t = Px^\delta + S$, troveremo nell' istessa guisa, che nella Equazion risultante

(*XIII*) $P4 + Q4\,S + R4\,S^2 + S4\,S^3 + \text{ec.} = 0$

i coefficienti conterranno la x generalmente ad un grado $\pi - (f1 + f2 + f3 + f4)\alpha + f1\beta + f2\gamma + f3\delta$, essendo in $P4$ $f4 = 0$, in $Q4$ $f4 = 1$, in $R4$ $f4 = 2$, in $S4$ $f4 = 3$, ec.

412. Se proseguiamo a fare ulteriori supposizioni simili alle precedenti, ne verranno sempre delle Trasformate nuove affatto somiglianti alle passate, in ciascuna delle quali gli esponenti della x potran sempre in egual maniera determinarsi, e avendo essi un andamento costante, verran

tutti

tutti rappresentati dalla formola generale

(XIV) $\pi - (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + \ldots\ldots)\alpha + f_1\beta + f_2\gamma + f_3\delta + f_4\varepsilon +$ ec.

413. Sciogliere per serie l' Equazione indeterminata $Z = f(x)(y) = 0$.

Liberata tale Equazione dalle radici uguali (N.° 306), supponghiamo, che sia prossimamente

(XV) $y = Lx^\alpha + Mx^\beta + Nx^\gamma + Px^\delta + Qx^\varepsilon +$ ec.,

e sia $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$, $\gamma > \delta$, ec.. Se determineremo opportunamente il valore degli esponenti α, β, γ, δ, ε, ec., e quello dei coefficienti L, M, N, P, Q, ec., avremo allora sciolto il Problema. Poichè, qualunque siasi la x, questi coefficienti, ed esponenti devono evidentemente esser sempre gli stessi, se noi li determineremo in un caso particolare della x, nel caso per esempio di x infinita; è chiaro, che essi saranno ancora i medesimi in tutte le altre supposizioni anche mentre la x abbia valori finiti. Fatto pertanto $x = \infty$, e la $Z = 0$ cangiatasi perciò nella (III), e la (XV) nella $y = Lx^\alpha$, cerco, siccome nei (N.¹ 400, 401), il valore di α, e supposto, che si trovi $\alpha = \frac{t}{k}$, e così la (III) si riduca ad una Equazione, il cui primo membro abbia la forma della (V), determino col mezzo di essa, come nel (N.° 403), l' Equazione (VI), e quindi il valore della L, che chiamerò L'. Avremo in tal modo il primo termine $Lx^\alpha = L'x^{\frac{t}{k}}$, e resteranno nella (XV) a conoscersi i coefficienti, e gli esponenti degli altri termini Mx^{β}, Nx^{γ}, Px^{δ}, ec.

414. Determinare le quantità k, l riduco la $Z = 0$ alla (VII) (N.° 407), in modo che posto Lx^{α} in luogo della y risulti $h'\alpha + g' > h''\alpha + g''$, $h''\alpha + g'' > h'''\alpha + g'''$, ec., e supposto

(XVI) $Mx^{\beta} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta} + \text{ec.} = u$, onde la ($XV$) divenga $y = Lx^{\alpha} + u$, colloco questo valore invece della y nella (VII). A cagione di $\alpha = \frac{l}{k}$ essa (VII) per questa sostituzione si cangierà nella ($VIII$) (N.° 407), e però nella (X), ove in luogo di L, e di α dovran porsi i valori L', $\frac{l}{k}$, ed ove a cagione di L' radice della (VI) (N.° prec.), e di $F' = a'L'^{h'} + b'L'^{h'-k} + c'L'^{h'-2k} + d'L'^{h'-3k} + \text{ec.}$ (N.° 407) dovrà mancare il termine $F'x^{h'\alpha+g} = F'x^{\pi}$.

415. Supponghiamo per ora che la (VI) non abbia che una sola radice $= L'$. In questa ipotesi non potendo pel (N.° 305) essere

$h'a'L'^{h'-1} + (h'-k)b'L'^{h'-k-1} + (h'-2k)$

$c'L'^{h'-2k-1} + (h'-3k)d'L'^{h'-3k-1} + \text{ec.} = 0$,

vedesi che nella ($VIII$), e nella (X) dovrà necessariamente sussistere il termine $G'x^{(h'-1)\alpha+g}$ $= G'x^{\pi-\alpha}$; non possiamo dire lo stesso degli altri termini, potendo benissimo uno qualunque, o più di essi svanire dalle Equazioni. Avvertasi però, che mentre non sia esattamente $y = L'x^{\frac{l}{k}}$, non

non possono tutti mancare in una volta i termini, che nella (X) compongono il coefficiente P I; imperciocchè, se ciò fosse, il primo membro di essa (X) risultando divisibile esattamente per u, anche il primo membro della data (*VII*) sarebbe divisibile esattamente per $y - L' x^{\frac{1}{b}}$, e quindi avremmo $y =$ perfettamente ad $L' x^{\frac{1}{b}}$ (N.° 21); il che presentemente supponghiamo che non sia.

416. Venendo pertanto alla determinazione delle quantità β, M, γ, N, δ, P, ec., e primieramente a quella di β; facciamo di nuovo x infinita. A cagione di $\pi' > \pi''$, $\pi'' > \pi'''$, ec. (N.i 414, 407), stando nella prima fila della (X) il solo termine $F'' x^{\pi''}$ (N.° 399), nella seconda il solo $G' x^{\pi' - \alpha} u$, nella terza il solo $H' x^{\pi' - 2\alpha} u^2$, ec.; tale Equazione diventerà $F'' x^{\pi''} + G' x^{\pi' - \alpha} u' + H' x^{\pi' - 2\alpha} u^2 + I' x^{\pi' - 3\alpha} u^3 + \text{ec.} = 0$; ma per la fatta supposizione la (*XVI*) diviene $u = M x^{\beta}$; dunque sostituendo otterremo

(*XVII*) $F'' x^{\pi''} + G\ M x^{\pi' - \alpha + \beta} + H' M^2 x^{\pi' - 2\alpha + 2\beta} + I' M^3 x^{\pi' - 3\alpha + 3\beta} + \text{ec.} = 0$. Ora col paragonare secondo il (N.° 393) gli esponenti di quest' ultima Equazione, per β trovansi i risultati $\pi'' - \pi' + \alpha$, $\frac{\pi'' - \pi'}{2} + \alpha$, $\frac{\pi'' - \pi'}{3} + \alpha$, ec., dei quali per essere $\pi' > \pi''$ ec., il minore di tutti si è il primo. Dunque pel (Numero 398) dovrà essere $\beta = \pi'' - \pi' + \alpha$.

 417.

417. Per vedere se β può avere altri valori, paragono il secondo esponente $\pi' - \alpha + \beta$ con gli altri, che seguono (N.° 395). Ora o sussiste il termine $H' M^2 x^{\pi' - 2\alpha + 2\beta}$, o no; se sussiste, pel valore più piccolo si trova $\beta = \alpha$; se no, sussistendo per esempio l' altro, che segue $H'' M^2 x^{\pi'' - 2\alpha + 2\beta}$, si trova pel valor minimo $\beta = \frac{\pi' - \pi''}{2} + \alpha$. Dunque β non potrà avere altro valore che il precedente $\pi'' - \pi' + \alpha$, poichè se ne avesse qualche altro, questo dovrebbe essere od $= \alpha$, come nel primo caso, oppure pel (N.° 414) $> \alpha$, come nel caso secondo, e frattanto deve essere sempre $\beta < \alpha$ (N.° 413).

418. Nella ipotesi di x infinita la precedente (*XVII*) diviene $F' x^{\pi''} + G' M x^{\pi''} = 0$ (N.° 399): dunque dividendo per $x^{\pi''}$, avremo $F' + G' M = 0$, e però $M = - \frac{F''}{G'}$, onde sarà

$$M x^{\beta} = - \frac{F''}{G'} x^{\pi'' - \pi' + \alpha}.$$

419. Se nelle (*VIII*), (*X*) oltre $F' = 0$ (N.° 414) fosse ancora $F'' = 0$, $F''' = 0$, ec., e il primo termine, che sussiste, fosse per esempio $F^{v} x^{\pi^{v}}$, in egual modo, come nel (N.° 416), troverebbesi β avere il solo valore $\pi^{v} - \pi' + \alpha$, e troverebbesi $M = - \frac{F^{v}}{G'}$.

420. Passiamo alla determinazione delle quantità γ, N nel termine $N x^{\gamma}$, e prendiamo perciò l' E-

l' Equazione (XI). Dati alla M, ed alla β i loro valori determinati nei (N.[i] prec.[i]), nel coefficiente $P2$ si elideranno tosto pel (N.° 418) i due termini $F' x^{\pi''} + G' M x^{\pi'-\alpha+\beta}$; e gli altri, che restano, o si distruggono tutti, cosicchè risulta $P2 = o$, o no. Nel primo di questi casi divenendo la (XI) divisibile esattamente per z, la (X) lo sarà esattamente per $u - M x^{\beta}$, e avendosi quindi $u = M x^{\beta}$, dovrà essere esattamente $y = L x^{\alpha} + M x^{\beta}$, terminando la serie con questi soli due termini. Che se non risulta $P2 = o$, supponghiamo, che in esso $P2$ il primo termine, che sussiste, abbia rapporto alla x l' esponente $\pi''' - f1'\alpha + f1'\beta$ (N.° 409), e chiamiamo questo φ'. In $Q2$ essendo $G' x^{\pi'-\alpha}$ il primo termine (N.° 415), $\pi' - \alpha$ sarà il primo esponente; e per considerare la cosa in generale, il primo esponente in $R2$ sia $\pi'' - (f1'' + 2)\alpha + f1''\beta$, in $S2$ sia $\pi^{vi} - (f1''' + 3)\alpha + f1'''\beta$, ec. (cit.° N.° 409). Ciò posto, facciamo $x = \infty$, e pongasi quindi in luogo della z il valor, che risulta $N x^{\gamma}$: dai termini, che per questa supposizione, e sostituzione rimangono nella (XI), vedesi che otterremo la serie di esponenti φ', $\pi' - \alpha + \gamma$, $\pi'' - (f1'' + 2)\alpha + f1''\beta + 2\gamma$, $\pi^{iv} - (f1''' + 3)\alpha + f1'''\beta + 3\gamma$, ec. Ora da questi pel valore di γ ottengonsi pel (N.° 393) i risultati

$$\varphi' - \pi' + \alpha, \ \frac{\varphi' - \pi''}{2} + \frac{f1''(\alpha - \beta)}{2} + \alpha, \ \frac{\varphi' - \pi^{vi}}{3} + \frac{f1'''(\alpha - \beta)}{3} + \alpha,$$ ec., e fra essi a cagione della

la serie π', π'', π''', ec. decrescente, e di $\alpha > \beta$ (N.[i] 414, 413) il minore di tutti è il primo: dunque sarà $\gamma = \varphi' - \pi' + \alpha$. Come poi nel (N.° 417), si dimostra, che γ non può avere, che il solo valore $\varphi' - \pi' + \alpha$.

421. Attribuito alla γ il valore ora trovato, nella solita ipotesi di x infinita la (XI) si ridurrà alla $B x^{\varphi'} + G' N x^{\varphi} = 0$, chiamato B il coefficiente del primo termine, che rimane in P 2, e però avendosi $B + G' N = 0$, sarà $N = -\frac{B}{G'}$, e per conseguenza $N x^{\gamma} = -\frac{B}{G'} x^{\varphi' - \pi' + \alpha}$.

422. Portandoci al termine $P x^{\theta}$, colloco nella (XII) in luogo della N, γ i loro valori (N.[i] 420, 421): nel coefficiente P 3 svaniranno perciò i termini $B x^{\varphi'} + G' N x^{\pi' - \alpha + \gamma}$ (N.° 421), e gli altri, come si è detto nei (N.[i] 415, 420), o renderanno $P 3 = 0$, o no. Nel primo di questi casi la (XII) potrà dividersi con esattezza per z, e però anche la (XI) per $z - N x^{\gamma}$, onde avendosi $z = N x^{\gamma}$, sarà esattamente $y = L x^{\alpha} + M x^{\beta} + N x^{\gamma}$.

Che se P 3 non diventa zero; l' esponente del primo termine, che sussiste in P 3, sia per esempio $\pi^{v} - (f1' + f2')\alpha + f1'\beta + f2'\gamma$ (N.° 410), che per brevità chiamerò φ''. In Q 3 il primo esponente già sappiamo essere $\pi' - \alpha$; in R 3 sia $\pi''' - (f1'' + f2'' + 2)\alpha + f1''\beta + f2''\gamma$, in S 3 sia $\pi^{vi} - (f1''' + f2''' + 3)\alpha + f1'''\beta + f2'''\gamma$, ec.

ec. Ponendo x infinita, e però $t = P x^{\delta}$, dalla (XII) avremo la serie d' esponenti

φ'', $\pi' - \alpha + \delta$, $\pi''' - (f1'' + f2'' + 2)\alpha$, $+ f1''\beta + f2''\gamma + 2\delta$, $\pi^{IV} - (f1''' + f2''' + 3)$ $\alpha + f1'''\beta + f2'''\gamma + 3\delta$, ec., e quindi per δ ricavandosi i valori

$$\varphi'' - \pi' + \alpha, \frac{\varphi'' - \pi'''}{2} + \frac{f1''(\alpha-\beta)}{2} + \frac{f2''(\alpha-\gamma)}{2} + \alpha,$$

$$\frac{\varphi'' - \pi^{IV}}{3} + \frac{f1'''(\alpha-\beta)}{3} + \frac{f2'''(\alpha-\gamma)}{3} + \alpha, \text{ ec.}$$

dovrà essere $\delta = \varphi'' - \pi' + \alpha$, poichè tutti gli altri valori sono maggiori di questo. Come poi nel (N.° 417), si dimostra che δ non può avere che questo solo valore.

423. Chiamato C il coefficiente del termine, che nella (XII) contiene $x^{\varphi''}$ (N.° 422), in conseguenza della supposizione ora fatta, essa (XII) si ridurrà alla $C x^{\varphi''} + G' P x^{\varphi''} = 0$, e però avendosi $P = -\frac{C}{G'}$, sarà $P x^{\delta} = -\frac{C}{G'} x^{\varphi'' - \pi' + \alpha}$.

424. Proseguendo lo stesso raziocinio potranno così determinarsi tutti i coefficienti, e gli esponenti ulteriori; e ciò fatto, la serie degli esponenti sarà la seguente α, $\beta = \pi'' - \pi' + \alpha$, $\gamma = \varphi' - \pi' + \alpha$, $\delta = \varphi'' - \pi' + \alpha$ ec., essendo $\alpha = \frac{l}{k}$, $\varphi' = \pi''' - f1'\alpha + f1'\beta$, $\varphi'' = \pi^{IV} - (f1' + f2')\alpha + f1'\beta + f2'\gamma$, ec. Col sostituire pertanto questi valori, avendosi la serie

$\alpha =$

$$\alpha = \frac{l}{k},$$

$$\beta = (\pi'' - \pi') + \frac{l}{k},$$

$$\gamma = (\pi''' - \pi') + f1'(\pi'' - \pi') + \frac{l}{k},$$

$$\delta = (\pi^{\prime v} - \pi') + f1'(\pi'' - \pi') + f2'(\pi''' - \pi') + f1'f2''(\pi'' - \pi') + \frac{l}{k},$$

ec.

vedesi, che, dalla formola generale

$$(XVIII)\ \frac{l}{k} + f'(\pi'' - \pi') + f''(\pi''' - \pi') + f'''(\pi^{\prime v} - \pi') + f^{\prime v}(\pi^{v} - \pi') + \text{ec.}$$ aver potremo il valore di tutti gli esponenti α, β, γ, δ, ec. coll' attribuire successivamente alle quantità f', f'', f''', $f^{\prime v}$, ec. i valori 0, 1, 2, 3, ec.

425. Data pertanto l' Equazione $Z = 0$, e con la sostituzione di $y = Lx^{\alpha}$ determinati i valori di α, e di L (N.[i] 413, 414), e quello per conseguenza delle quantità π', π'', π''', $\pi^{\prime v}$, ec. (N.[i] 407, 414), trovo le differenze $\pi' - \pi''$, $\pi' - \pi'''$, $\pi' - \pi^{\prime v}$, ec. sottraendo dal massimo esponente π' gli altri tutti π'', π''', $\pi^{\prime v}$, ec.; quindi dalla quantità α sottraggo la prima differenza $\pi' - \pi''$, replicandola successivamente le volte 1, 2, 3, ec. da questi risultati compresavi α levo in seguito la differenza $\pi' - \pi'''$ ripetendola successivamente le stesse volte 1, 2, 3, ec.; proseguo da questi ultimi termini a togliere la differenza terza $\pi' - \pi^{\prime v}$ con repli-

plicarla in egual modo le volte 1, 2, 3, ec., e così operando in progresso vedesi dai (N.[i] prec.), che verremo a determinare la serie di tutti gli esponenti β, γ, δ, ec.

Affine poi di conoscere i coefficienti della (*XV*), o ci serviremo dei metodi esposti nei (N.[i] 418, 421, 423), dai quali apparisce, che nella nostra supposizione (N.° 415) tali coefficienti non sono mai che tante funzioni razionali del coefficiente L′, e perciò tante quantità reali, o immaginarie, secondocchè essa L′ è reale, o immaginaria: oppure ci serviremo del metodo dei coefficienti indeterminati col sostituire nella $Z = 0$ la quantità $Lx^{\alpha} + Mx^{\beta} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta} +$ ec. in luogo della y nella seguente maniera.

(*XIX*) 426. Sia $xy^2 + x^2y + a^2y - b^3 = 0$ l' Equazione data a sciogliersi per Serie.

Ridotta questa pel (N.° 400) alla

$$\left.\begin{array}{l} xy^2 + \\ (x^2 + a^2)y - \\ - b^3 \end{array}\right| = 0,$$

e colla ipotesi di $x = \infty$, avutane la $xy^2 + x^2y - b^3 = 0$, suppongo $y = Lx^{\alpha}$ (N.° 413), sostituisco, e dalla $L^2x^{2\alpha+1} + Lx^{\alpha+2} - b^3 = 0$ ricavati gli esponenti $2\alpha + 1$, $\alpha + 2$, o col loro mezzo ritrovo pei (N.[i] 400, 401) avere la α i due valori $1, -2$, onde si à $\alpha' = 1$, $\alpha'' = -2$. Teniam conto per ora del primo $\alpha' = 1$. Avendosi quindi

$\frac{l}{k} = 1$ (N.° 402), e però $l = 1$, $k = 1$, ed essendo $x y^2 + x^2 y$ i termini della data, che per questo primo valore della α divengono infiniti di maggior grado essendo $a^2 y$, $-b^3$ gli altri successivi, scrivo pei (N.i 407, 414) essa data, come quì sotto

$$\left.\begin{array}{l} x y^2 + x^2 y + \\ a^2 y - \\ - b^3 \end{array}\right| = 0,$$

facendo $g' = 1$, $h' = 2$, $g'' = 0$, $h'' = 1$, $g''' = 0$, $h''' = 0$. Avremo dunque $\pi' = h' \alpha + g' = 1 + 2 = 3$, $\pi'' = h'' \alpha + g'' = 1$, $\pi''' = h''' \alpha + g''' = 0$; e poichè ne viene $\pi' - \pi'' = 3 - 1 = 2$, $\pi' - \pi''' = 3 - 0 = 3$, ed abbiamo $\alpha' = 1$, pel (N.° preced.) la serie degli esponenti verrà compresa nei numeri

$$\begin{array}{cccc} 1, & -1, & -3, & -5, \text{ ec.} \\ -2, & -4, & -6, & -8, \text{ ec.} \\ -5, & -7, & -9, & -11, \text{ ec.} \\ -8, & -10, & -12, & -14, \text{ ec.} \\ & \text{ec.} & \text{ec.}, & \end{array}$$

e quindi, scrivendo pel (N.° 413) tali esponenti secondo l' ordine della loro grandezza, sarà $y = L x + M x^{-1} + N x^{-2} + P x^{-3} + Q x^{-4} + R x^{-5}$ + ec. Ripongo ora nella (*XIX*) invece della y questo valore, e risultandoci

$$x y^2 = L^2 x^3 + 2LMx + 2LN + 2LPx^{-1} + 2LQx^{-2} + 2LRx^{-3} + \text{ec.}$$
$$+ M^2 x^{-1} + 2MNx^{-2} + 2LPx^{-3} + \text{ec.}$$
$$+ N^2 x^{-3} + \text{ec.}$$
$$x^2 y = Lx^3 + Mx + N + Px^{-1} + Qx^{-2} + Rx^{-3} + \text{ec.}$$
$$a^2 y = La^2 x + Ma^2 x^{-1} + Na^2 x^{-2} + Pa^2 x^{-3} + \text{ec.}$$
$$-b^3 = -b^3$$

pel metodo dei coefficienti indeterminati ricaverem le Equazioni

$$L^2 + L = 0,\ 2LM + M + La^2 = 0,$$
$$2LN + N - b^3 = 0,$$
(XX) $$2LP + M^2 + P + Ma^2 = 0,$$
$$2LQ + 2MN + Q + Na^2 = 0,$$
$$2LR + 2LP + N^2 + R + Pa^2 = 0, \text{ ec.}$$

Ora da queste si ottiene

$$L = -1,\ M = -a^2,\ N = -b^3,\ P = 0,\ Q = a^2 b^3,\ R = b^6, \text{ ec.}$$

Dunque sostituendo avremo prossimamente

$$y = -x - \frac{a^2}{x} - \frac{b^3}{x^2} + \frac{a^2 b^3}{x^4} + \frac{b^6}{x^5} + \text{ec.}$$

427. Passiamo all' altro valore $\alpha'' = -2$. In questo secondo caso avremo $\frac{t}{k} = -2$; e però $t = -2$, $k = 1$, e la (*XIX*) dovrà pel (N.° 414) disporsi, come quì sotto

$$\left.\begin{array}{l} x^2 y - b^3 + \\ x y^2 + \\ a^2 y \end{array}\right| = 0 ,$$

avendosi $g' = 2$, $h' = 1$, $g'' = 1$, $h'' = 2$, $g''' = 0$, $h''' = 1$. Poichè dunque si ricava $\pi' = h'\alpha + g' = -2 + 2 = 0$, $\pi'' = h''\alpha + g'' = -4 + 1 = -3$, $\pi''' = h'''\alpha + g''' = -2$, e però $\pi' - \pi'' = 3$, $\pi' - \pi''' = 2$, la serie degli esponenti in questo secondo caso sarà

$$\begin{array}{l} -2, \; -5, \; -8, \; -11, \text{ ec.} \\ -4, \; -7, \; -10, \; -13, \text{ ec.} \\ -6, \; -9, \; -12, \; -15, \text{ ec.} \\ -8, \; -11, \; -14, \; -17, \text{ ec.} \\ \qquad\qquad \text{ec.}, \end{array}$$

e però avremo

$$y = L x^{-2} + M x^{-4} + N x^{-5} + P x^{-6} + Q x^{-7} + R x^{-8} + \text{ec.},$$

sostituisco nella data in luogo della y questo valore, rinnovo il calcolo precedente, e ottenendosi $L = b^3$, $M = -a^2 b^3$, $N = -b^6$, $P = a^4 b^3$, $Q = 3 a^2 b^6$, $R = 2 b^9 - a^6 b^3$, ec. sarà prossimamente

$$y = \frac{b^3}{x^2} - \frac{a^2 b^3}{x^4} - \frac{b^6}{x^5} + \frac{a^4 b^3}{x^6} + \frac{3 a^2 b^6}{x^7} + \frac{2 b^9 - a^6 b^3}{x^8} + \text{ec.}$$

428. I due valori ora trovati ci daranno per serie i due valori, che aver deve la y nella (*XIX*). Osservando fra le (*XX*) la $L^2 + L = 0$, veggo che da questa si à non solo $L = -1$, ma anche

$L =$

$L = 0$; a che dunque servirà questo secondo valore? lo sostituisco nelle stesse (XX), e avendosi quindi $L = 0$, $M = 0$, $N = b^3$, $P = 0$, $Q = -a^2 b^3$, $R = -b^6$, ec., il valore della y supposto nel (N.° 426) diverrà $= \frac{b^3}{x^2} - \frac{a^2 b^3}{x^4} - \frac{b^6}{x^5} +$ ec.; ma questo non è che il valor della y ottenuto nel (N.° prec.). Dunque il valore zero della L equivale all' altro di $\alpha'' = -2$ (N.° prec.).

429. Passiamo presentemente alla supposizione, che la (*VI*) abbia due radici $= L'$ (N.° 415). In questa ipotesi è chiaro dalle (*IX*), che avremo tanto $F' = 0$, quanto $G' = 0$, ma non essendo tal radice L' ripetuta nella (*VI*) che solo due volte, non potrà già essere $H' = 0$. Ciò posto, e fatta $x = \infty$, sostisuiscasi nella (X) la quantità $M x^{\beta}$ in luogo della u: mancando nei coefficienti $P1$, $Q1$ (N.° 407) i termini $F' x^{\pi'}$, $G' x^{\pi' - \alpha}$, non si potranno dalla sostituzione aver gli esponenti π', $\pi' - \alpha + \beta$; ma nel coefficiente $R1$, esistendo necessariamente il termine $H' x^{\pi' - 2\alpha'}$, risulterà da esso l' esponente $\pi' - 2\alpha + 2\beta$. Supponghiamo pertanto, come nei (N.i 419, 420, 422), che la serie dei primi esponenti, cioè degli esponenti di questi termini, che sussistono nella (X) alla ipotesi di $x = \infty$, sia la seguente

(XXI) π^{v}, $\pi''' - \alpha + \beta$, $\pi' - 2\alpha + 2\beta$, $\pi^{vi} - 3\alpha + 3\beta$, $\pi' - 4\alpha + 4\beta$, ec. Ora ricavandosi da questi per β i valori $\pi^{v} - \pi''' + \alpha$, $\frac{\pi^{v} - \pi'}{2} + \alpha$, $\frac{\pi - \pi'}{3} + \alpha$,

$\frac{\pi^{v}-\pi^{iv}}{4}+\alpha$, ec.; veggo che il secondo $\frac{\pi^{v}-\pi'}{2}+\alpha$ è minore di tutti i susseguenti, e può essere insieme, o minore, o maggiore, od uguale al primo $\pi^{v}-\pi'''+\alpha$. Dunque la presente supposizione di L' radice doppia della (*VI*) ci conduce a delle conseguenze diverse dalle ottenute nel (N.° 417), e quindi meritava d' essere distinta dall' ipotesi del (N.° 415).

430. Sia primieramente $\frac{\pi^{v}-\pi'}{2}+\alpha<\pi^{v}-\pi'''+\alpha$, pel (N.° 398) avremo $\beta=\frac{\pi^{v}-\pi'}{2}+\alpha$. Paragonando poi in (*XXI*) il terzo esponente con i susseguenti, veggo, come nel (N.° 417), che per β non si ricava più alcun valore opportuno.

2.° Abbiasi $\frac{\pi^{v}-\pi'}{2}+\alpha>\pi^{v}-\pi'''+\alpha$, ne verrà $\beta=\pi^{v}-\pi'''+\alpha$ (N.° 398); ma paragonando il secondo degli esponenti (*XXI*) con gli altri, che seguono, ottengonsi per β i risultati $\pi'''-\pi'+\alpha$, $\frac{\pi'''-\pi^{iv}}{2}+\alpha$, α, ec. Dunque avendosi il primo di questi $<\alpha$, potrà essere ancora $\beta=\pi'''-\pi'+\alpha$ (N.° 395). Anche in questo secondo caso si vede, come nel (N.° 417), che β non può avere altro valore fuorchè i due ritrovati.

3.° Sia finalmente $\frac{\pi^{v}-\pi'}{2}+\alpha=\pi^{v}-\pi'''+\alpha$, risulterà $\beta=\pi^{v}-{}'''+\alpha$, e troveremo col solito cal-

calcolo (N.° 417) non potersi dare alla β opportunamente altro valore.

431. Cercando ora di determinare il coefficiente M; osservo che fatta la sostituzione di $M x^\beta$ in vece di u in tutti e tre i casi precedenti la (*X*) si convertirà infine nella

$$(XXII)\quad F^{v} x^{\pi^{v}} + G''' M x^{\pi'''-\alpha+\beta} + H' M^2 x^{\pi'-\alpha+\beta} = 0 .$$

Ma allorquando $\beta = \frac{\pi^{v}-\pi'}{2} + \alpha$ (1.° caso), la (*XXII*) diviene $F^{v} x^{\pi^{v}} + H' M^2 x^{\pi^{v}} = 0$, e quindi si à $F^{v} + H' M^2 = 0$, $M = \pm\sqrt{-\frac{F^{v}}{H'}}$. Dunque nel primo caso la quantità M avrà un doppio valore, e perciò essendo $M x^\beta = \pm x^{\frac{\pi^{v}-\pi'}{2}+\alpha} \sqrt{-\frac{F^{v}}{H'}} =$
$\pm x^{\frac{\pi^{v}-\pi'+2\alpha}{2}} \sqrt{-\frac{F^{v}}{H'}} = \pm\sqrt{-\frac{F^{v} x^{\pi^{v}-\pi'+2\alpha}}{H'}}$, potrà essere $M x^\beta$ tanto $= \sqrt{-\frac{F^{v} x^{\pi^{v}-\pi'+2\alpha}}{H'}}$, come $=$
$-\sqrt{-\frac{F^{v} x^{\pi^{v}-\pi'+2\alpha}}{H'}}$.

2.° Facciamo successivamente $\beta = \pi^{v} - \pi''' + \alpha$, $\beta = \pi''' - \pi' + \alpha$ (2.° caso N.° prec.); dalla (*XXII*) si otterranno in corrispondenza le due Equazioni $F^{v} + G''' M = 0$, $G''' + H' M = 0$. Dunque ricavandosi $M = -\frac{F^{v}}{G'''}$, $M = -\frac{G'''}{H'}$, potrà essere

$M x^\beta$

$M\,x^\beta = -\frac{F^v}{G'''}\,x^{\pi^v - \pi''' + \alpha}$, ed $M\,x^\beta = -\frac{G'''}{H'}\,x^{\pi''' - \pi' + \alpha}$.

3.° Abbiasi infine $\beta = \pi^v - \pi''' + \alpha = \frac{\pi^v - \pi'}{2} + \alpha$ (3.° caso N.° prec.); dalla (*XXII*) risultando $F^v + G''' M + H' M^2 = 0$, la M avrà i due valori, che si ricavano dalla soluzione di questa Equazione: dunque, chiamati questi M', M'', i due risultati $M' x^{\pi^v - \pi''' + \alpha}$, $M'' x^{\pi^v - \pi''' + \alpha}$ quelli saranno, che ottiene $M x^\beta$ nell' ultimo dei nostri tre casi.

432. I due precedenti valori M', M'' possono essere disuguali, ed uguali fra loro. Se sono disuguali, saranno ancora disuguali fra loro i due risultati $M' x^{\pi^v - \pi''' + \alpha}$, $M'' x^{\pi^v - \pi''' + \alpha}$; ma se quelli sono uguali, riesciranno tra loro uguali anche questi, e per $M x^\beta$ non si otterrà che un solo valore.

433. Il valore, o i valori della β, che servono al presente caso, sono diversi dall' accennato nel (N.° 416): dunque neppure gli esponenti ulteriori γ, δ, ec. avranno pei (N.i 420, 422, 424) i valori, che dipendono dalla formola generale (*XVIII*), e per conseguenza non potrò formare la serie $L\,x^\alpha + M\,x^\beta + N\,x^\gamma +$ ec., e sostituendola nella $Z = 0$ invece della y, determinare, come nel (N.° 416), con l' ajuto dei coefficienti indeterminati il valore delle quantità M, N, P, ec.

434. Dovendo pertanto ricorrere ad altro mezzo,

zo, supponghiamo, che col metodo dei (N.[i] 416, 418) siasi già conosciuto il valore della L, e dell' α; e supponghiamo che siasi trovato accadere sul termine Mx^{β} il primo, o il secondo dei due casi precedenti (N.° 431), od anche il terzo nella prima supposizione (N.° 432). Acquistando perciò Mx^{β} due valori, chiamiamo $M'x^{\beta'}$ uno di essi, e giacchè quello, che di uno si dice, dicesi pur anche dell' altro, fermiam l' attenzione sul valore $M'x^{\beta'}$. Avendosi $u = M'x^{\beta'} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta}$ + ec., potrò rapporto alla (*X*), ed alla (*XVI*) fare gli stessi raziocinii, che si fecero nei (N.[i] 407, 413, 414) rapporto alla $Z = o$, ed alla (*XV*), mentre la (*VI*) non aveva che una sola radice $= L'$; e quindi scritta la (*X*), come giusta il (N.° 414) si scrisse in (*VII*) la $Z = o$, sostituisco in essa $M'x^{\beta'} + z$ in vece della u, e nella Equazion, che risulta, chiamo ϱ', ϱ'', ϱ''', ec. i successivi esponenti della x, siccome tali esponenti nelle (*VIII*), (*X*) chiamaronsi π', π'', π''', ec.; e rinovati gli stessi discorsi dei (N.[i] 416, 420, 422, 424), troveremo, che

$$(XXIII)\quad \beta' + g'(\varrho'' - \varrho') + g''(\varrho''' - \varrho') + g'''(\varrho^{iv} - \varrho') +$$

ec. ci esprime la formola generale degli esponenti β', γ, δ, ec., e troveremo, che i coefficienti N, P, ec. si determinano dalla M' per tante Equazioni del primo grado.

Ciò dunque essendo, determino, come nel (N.° 425), dalla (*XXIII*) il valore dei successivi esponenti β', γ, δ, ec., sostituisco nella (*X*) in luogo della u la quantità $M' x^{\beta'} + N x^{\gamma} + P x^{\delta} +$ ec., e operando, come nel (N.° 426), col metodo dei coefficienti indeterminati avrò il valore cercato delle quantità M', N, P, ec.

435. Venga data l' Equazione

$$x^3 y^2 - 3 x^2 y^2 + 5 x^2 y - 6 x^4 y + 9 x^5 - a^4 = 0.$$

Ridotta essa pel (N.° 400) alla

$$\left.\begin{array}{l}(x^3 - 3 x^2) y^2 + \\ (-6 x^4 + 5 x^2) y + \\ (9 x^5 - a^4)\end{array}\right| = 0, \qquad (XXIV)$$

col supporre $x = \infty$, ne formo la $x^3 y^2 - 6 x^4 y + 9 x^5 = 0$, e ponendo $y = L x^{\alpha}$, la $L^2 x^{2\alpha+3} - 6 L x^{\alpha+4} + 9 x^5 = 0$, da dove ottenendosi $\alpha = 1$, ricavo la $L^2 - 6L + 9 = 0$. Ora amendue i valori della L, che si ànno da quest' ultima Equazione, sono $= 3$; dunque, onde determinare le quantità M, β, N, γ, ec., non potendo pel (N.° 433) servire almeno per ora il metodo del (N.° 426), pongo nella data $L x^{\alpha} + u = 3x + u$ in luogo della y (N.° 434), e avuto pel (N.° 407) il risultato

$$\left.\begin{array}{l}(-27 x^4 + 15 x^3 - a^4) + \\ (-18 x^3 + 5 x^2) u + \\ (x^3 - 3 x^2) u^2\end{array}\right| = 0 \qquad (XXV)$$

faccio quì nuovamente $x = \infty$, e nella Equazione $-27 x^4 - 18 x^3 u + x^3 u^2 = 0$, che se ne ottiene, sostituisco $M x^{\beta}$ invece della u. Avendosi perciò $-27 x^4 - 18 M x^{\beta+3} + M^2 x^{2\beta+3} = 0$, troveremo mo essere $\beta = \frac{1}{2}$, ed $M^2 - 27 = 0$, onde $M = \pm\sqrt{27}$.

Accadendo quivi il primo dei casi del (N.° 430) ricorro pel (N.° 434) ai coefficienti indeterminati, cercando di trovare in prima il valore degli esponenti γ, δ, ec. Ridotta perciò la (*XXV*) alla

$$\left.\begin{array}{l} x^3 u^2 - 27 x^4 \\ - 18 x^3 u \\ - 3 x^2 u^2 + 15 x^3 \\ + 5 x^2 u \\ - a^4 \end{array}\right| = 0,$$

e fatto su di questa Equazione un calcolo somigliante agli esposti (N.^{i} 407, 414), troveremo che deve essere $\varrho' = 4$, $\varrho'' = \frac{7}{2}$, $\varrho''' = 3$, $\varrho^{IV} = \frac{5}{2}$, $\varrho^{V} = 0$ (N.° 407), e quindi riponendo nella (*XXIII*) gli opportuni valori, troveremo, come nei (N.^{i} 426, 427), che la serie degli esponenti domandati è la seguente $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{3}{2}$, -2, $-\frac{5}{2}$, -3, ec.. Colloco pertanto in luogo della u la quantità $M x^{\frac{1}{2}} + N + P x^{-\frac{1}{2}} + Q x^{-1} + R x^{-\frac{3}{2}} + S x^{-2} +$ ec. nella (*XXV*), e trovate, come nel (N.° 426), le Equazioni $M^2 - 27 = 0$, $2MN - 18M = 0$, $2MP + N^2 - 3M^2 - 18N + 15 = 0$, $2MQ + 2NP - 6MN - 18P + 5M = 0$, $2MR + 2NQ + P^2 - 6MP - 3N^2 - 18Q + 5N = 0$, $2MS + 2NR + 2PQ - 6MQ - 6NP -$

$18\,R + 5\,P = 0$, ec.; da queste ricavo $M = \pm 3\sqrt{3}$, $N = 9$, $P = \pm \frac{49}{2\sqrt{3}}$, $Q = \frac{49}{2}$, $R = \pm \frac{213}{2\sqrt{3}}$, $S = \frac{147}{2}$, ec. Dunque sarà $u = \pm 3\sqrt{3x} + 9 \pm \frac{49}{2\sqrt{3x}} + \frac{49}{2x} \pm \frac{213}{2x\sqrt{3x}} + \frac{147}{2x^2} \pm$ ec., e per conseguenza le radici della (*XXIV*) saranno

$$y' = 3x + 3\sqrt{3x} + 9 + \frac{49}{2\sqrt{3x}} + \frac{49}{2x} + \frac{213}{2x\sqrt{3x}} + \frac{147}{2x^2} + \text{ec.}$$

$$y'' = 3x - 3\sqrt{3x} + 9 - \frac{49}{2\sqrt{3x}} + \frac{49}{2x} - \frac{213}{2x\sqrt{3x}} + \frac{147}{2x^2} - \text{ec.}$$

436. Si verifichi la seconda supposizione del terzo caso (N.° 431): accadendo in allora evidentemente alla M, ed alla (*X*) quanto nella ipotesi del (N.° 429) si è asserito riguardo alla L, ed alla $Z = 0$; non potremo per la determinazione delle quantità γ, N, δ, P, ec. servirci del metodo indicato nel (N.° 434); ma converrà sostituire nella (*X*) invece della u la quantità $N x^{\gamma} + z$, e dalla (*XI*) determinar prima, come si è indicato, l' esponente γ, e gli altri poscia δ, ec. Egualmente rapporto ad $N x^{\gamma}$ o troveremo due valori diversi, come nei casi 1.°, e 2.° del (N.° 431), e nella prima supposizione del caso

3.°

3.° (N.° 432), o troveremo, come nella supposizione seconda dello stesso caso 3.°, un valor solo. Se troviamo pel termine $N x^{\gamma}$ due valori diversi, determinati dalla (*XI*) riguardo a ciascuno d' essi, come nei (N.[i] 425, 434), gli esponenti successivi δ, ec., potremo per la determinazione dei coefficienti P, ec. usar nuovamente il metodo dei coefficienti indeterminati, ponendo nella (*XI*) in luogo della z la quantità $P x^{\delta} +$ ec.: che se troviamo per $N x^{\gamma}$ un valor solo, allora bisognerà di nuovo riporre nella (*XI*) in luogo della z la quantità $N x^{\gamma} + t$, e proseguire avanti sempre il medesimo raziocinio.

437. La y nella ipotesi del (N.° 429) corrispondentemente al doppio valore della L è chiaro, che deve aver due valori. Ora supponendo la $Z = 0$ liberata pel (N.° 413) dalle radici uguali, questi due valori devono essere disuguali fra loro; dunque anche la serie $L x^{\alpha} + M x^{\beta} + N x^{\gamma} + P x^{\delta} +$ ec. dovrà avere due differenti valori, e dovrà per conseguenza o presto, o tardi biforcarsi. Dunque la seconda supposizione del caso 3.° (N° 432) non potrà già aver luogo rapporto a tutti i termini successivi $M x^{\beta}$, $N x^{\gamma}$, $P x^{\delta}$, ec.; ma dovrà avere un limite, e supponendo che si fermi al termine per esempio $P x^{\delta}$, gli esponenti, e i coefficienti dei termini a questo ulteriori si potranno sempre determinare, come nei (N.[i] 425, 426, 427, 434).

438. Supposta L′ reale, vedesi, che nel 2.° caso del (N.° 430) i valori di $M x^{\beta}$ sono amendue reali, e quindi pel (N.° 434) sono reali tutti i termini di amendue le serie, che ne derivano. Ma nel 1.°, e nella prima supposizione del 3.° caso possano i due valori di $M x^{\beta}$ essere immaginarii, e allora pel cit.° (N.° 434) i termini delle due serie diverranno immaginarii. Nella supposizione seconda poi del 3.° caso (N.° 432) vedesi, che il termine $M x^{\beta}$ sarà reale, e vedesi, che non potremo giudicare, se le serie, che ne verranno, siano per avere dei termini immaginarii, se non al punto della biforcazione (N.° 437).

Finalmente chiamata *semimmaginaria* una quantità, come la $\sqrt{-a x^3}$, la quale è immaginaria, mentre si prende la x con uno dei segni, nel nostro esempio col segno $+$, e diventa reale, quando la x si prende col segno contrario, nella nostra ipotesi col segno $-$; apparisce dal (N.° 431), che nel 1.° soltanto dei nostri casi (N.° 430) può il termine $M x^{\beta}$ essere semimmaginario, e che per conseguenza la nostra serie può contenere tali termini soltanto nel caso 1.°, e nella seconda supposizione del 3.° (N.° 432). L′ esempio del (N.° 435) ci dà due serie con termini semimmaginarii.

439. Abbia la (*VI*) tre radici $=$ L′: risultando perciò nella (*X*) $F' = o$, $G' = o$, $H' = o$, e non già $I' = o$ (N.° 154); supponghiamo, che, fatto $x = \infty$, e posto nella (*X*) $M x^{\beta}$ invece di u ci risulti

(XXVI) $F^{'v} x^{\pi^{'v}} + G^{'''} M x^{\pi^{'''} - \alpha + \beta} + H^{''} M^2 x^{\pi^{''} - 2\alpha + 2\beta} + I^{'} M^3 x^{\pi^{'} - 3\alpha + 3\beta} + K^{v'} M^4 x^{\pi^{v'} - 4\alpha + 4\beta} + \text{ec.} = 0$. Dalla serie degli esponenti

(XXVII) $\pi^{'v}$, $\pi^{'''} - \alpha + \beta$, $\pi^{''} - 2\alpha + 2\beta$, $\pi^{'} - 3\alpha + 3\beta$, $\pi^{v'} - 4\alpha + 4\beta$, ec. risultando pei valori della β le quantità

(XXVIII) $\pi^{'v} - \pi^{'''} + \alpha$, $\dfrac{\pi^{'v} - \pi^{''}}{2} + \alpha$, $\dfrac{\pi^{'v} - \pi^{'}}{3} + \alpha$, $\dfrac{\pi^{'v} - \pi^{v'}}{4} + \alpha$, ec., supponghiamo in 1.° luogo, che la prima $\pi^{'v} - \pi^{'''} + \alpha$ sia minore di tutte le altre; proseguendo in tal caso a paragonare il secondo degli esponenti (*XXVI*) con i successivi, troveremo, che β, oltre il valore $\pi^{'v} - \pi^{'''} + \alpha$ potrà avere anche gli altri due $\pi^{'''} - \pi^{''} + \alpha$, $\pi^{''} - \pi^{'} + \alpha$, oppure il solo $\dfrac{\pi^{'''} - \pi^{'}}{2} + \alpha$. Sia in 2.° luogo tra le quantità (*XXVIII*) minima la seconda $\dfrac{\pi^{'v} - \pi^{''}}{2} + \alpha$; in tal caso oltre questo valore troveremo dagli esponenti (*XXVII*), che β non può avere che l' altro $\pi^{''} - \pi^{'} + \alpha$. 3.° se finalmente $\dfrac{\pi^{'v} - \pi^{'}}{3} + \alpha$ sia minore di tutte le altre quantità (*XXVIII*), vedremo dalle (*XXVII*), che β non potrà avere, che questo solo valore.

440. Nella prima supposizione del 1.° di questi tre casi, è chiaro, che la (*XXVI*) si cangierà in corrispondenza nelle tre Equazioni $F^{'v} x^{\pi^{'v}}$

$+ G^{'''}$

$+ G''' M x^{\pi'^{v}} = o$, $G''' M x^{2\pi'''-\pi''} + H'' M^2 x^{2\pi''-\pi''}$ $= o$, $H'' M^2 x^{3\pi''-\pi'} + I' M^3 x^{3\pi''-\pi'} = o$, e quindi per M avendosi le tre Equazioni $F'^{v} + G''' M = o$, $G''' + H'' M = o$, $H'' + I' M = o$, il termine $M x^\beta$ avrà tre valori differenti fra loro, e tutti reali.

Nella supposizione seconda del 1.° caso dalla (*XXVI*) otterremo nella stessa maniera per M le due Equazioni $F'^{v} + G''' M = o$, $G''' + I' M^2 = o$, dalle quali si vede, che $M x^\beta$ otterrà tre valori diversi, il primo sempre reale, e gli altri due o reali, o immaginarii, o semimmaginarii.

Nel caso 2.° ottenendosi per M le due Equazioni $F'^{v} + H'' M^2 = o$, $H'' + I' M = o$, verremo alle stesse conseguenze della seconda supposizione del caso 1.°.

Nel caso 3.° finalmente l' Equazione in M sarà $F'^{v} + I' M^3 = o$, e per conseguenza dei tre valori di $M x^\beta$ uno sarà reale, e due immaginarii.

441. Può succeder quì pure, come nel (3.° N.° 432), che i primi due dei (*XXVIII*) valori siano tra loro uguali; in allora oltre il valore $\pi'^{v} - \pi''' + \alpha$ otterremo per β l' altro $\pi'' - \pi''' + \alpha$, e quindi la (*XXVI*) riducendosi alle due $F'^{v} x^{\pi'^{v}} + G''' M x^{\pi'^{v}} + H'' M^2 x^{\pi'^{v}} = o$, $H'' M^2 x^{3\pi''-2\pi'} + I' M^3 x^{3\pi''-2\pi'} = o$, avremo per M le due Equazioni $F'^{v} + G''' M + H'' M^2 = o$, $H'' + I M = o$. Così nel primo caso del (N.° 439) potrebbe darsi, che fosse $\pi''' - \pi'' + \alpha$ $= \frac{\pi''' - \pi'}{2} + \alpha$, e allora per M si avrebbero le

due

due Equazioni $F^{IV} - G^{'''}M = o$, $G^{'''} + H^{''}M + I^{'}M^2 = o$. Finalmente potendo essere tra loro uguali tutti e tre i primi (*XXVIII*) valori, in tal caso la β non avrà che un solo valore, e si avrà per M l' Equazione $F^{IV} + G^{'''}M + H^{''}M^2 + I^{'}M^3 = o$.

Nei primi due di questi casi, è chiaro, che due dei valori della M possono essere uguali fra loro, e ciò se le $F^{IV} + G^{'''}M + H^{''}M^2 = o$ $G^{'''} + H^{''}M + I^{'}M^2 = o$ sono corrispondentemente due quadrati perfetti; e nel terzo, se la $F^{IV} + G^{'''}M + H^{''}M^2 + I^{'}M^3 = o$ sia un cubo, allora saranno uguali fra loro tutti e tre i valori della M.

442. In tutti gli accidenti considerati finora dipendentemente dalla supposizione fatta nel (N.° 439), vedesi che si applica sempre quanto si è detto nei (N.[t] 433, 434, 436, 437, 438); e perciò che, se i valori della M sono differenti fra loro, gli esponenti γ, δ, ec. si determinano, mediante la (*XXIII*), e le quantità N, P, ec., col mezzo dei coefficienti indeterminati (N. 434). Ma se due dei valori della M, oppure tutti e tre sono fra loro uguali, allora replicando quanto si disse nel (N.° 436) vedremo in egual modo, che non potremo ricorrere per la determinazione delle quantità γ, N, δ, P, ec. nè alle formole simili alle (*XVIII*), (*XXIII*), nè ai coefficienti indeterminati, se non dopo il triplice spezzamento della serie (*XV*).

Se $x^2 y^3 + 3 c x^2 y^2 + 3 c^2 x^2 y + a^3 x^2 - c^3 x y - c^4 x + c^5 = 0$ sia l' Equazione data; fatti gli opportuni calcoli, come dai (N.[i] prec.), otterremo per y i tre valori

$$y' = c + c\sqrt{\frac{c}{x}} - \frac{c^2}{2x} - \frac{3c^2}{8x}\sqrt{\frac{c}{x}} - \frac{c^3}{2x^2} + \frac{105\, c^3}{128\, x^2}\sqrt{\frac{c}{x}} + \text{ec.}$$

$$y'' = c - c\sqrt{\frac{c}{x}} - \frac{c^2}{2x} + \frac{3c^2}{8x}\sqrt{\frac{c}{x}} - \frac{c^3}{2x^2} - \frac{105\, c^3}{128\, x^2}\sqrt{\frac{c}{x}} - \text{ec.}$$

$$y''' = c + \frac{c^2}{x} + \frac{c^3}{x^2} + \frac{3c^4}{x^3} + \frac{10\, c^5}{x^4} + \frac{49\, c^6}{x^5} + \text{ec.}$$

443. Che se la (*VI*) à quattro, cinque ec. radici $= L'$; replicandosi sempre gli stessi raziocinii, si potranno sempre determinare nella maniera medesima le serie corrispondenti.

444. Supponghiamo ora, che nella (*XV*) gli esponenti successivi della x vadan crescendo, cosicchè $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, $\gamma < \delta$, ec., e vogliasi determinare la nostra serie in questa nuova supposizione.

Il metodo a seguirsi, onde far ciò, vedrà ognuno facilmente da se medesimo non essere diverso dall' esposto fin' ora, mentre però alla x, allorquando nel primo caso attribuivasi un valore infinitamente grande, quivi se ne attribuisca uno infinitamente piccolo (N.° 399). Per conseguenza

1.° Cer-

1.° Cercando di conoscere, quale divenga la $Z=0$ nel caso di x infinitesima, seguiremo bensì il calcolo dei (N.i 400, 401), ma dovremo tener conto non dei massimi, ma dei termini minimi della Equazion data (N.° 399); quindi scriveremo la Y in modo, che gli esponenti della x formino tante serie crescenti, e poscia determinando la α in maniera, che due, o più termini della serie (I) divengano uguali fra loro, e minori degli altri, dovremo tra i valori $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, ec. tener conto dei minimi, e non dei massimi (N.° 404).

2.° La $Z=0$ deve in seguito, come nel (N.° 407) ridursi alla (VII), ma in modo, che $b'\alpha+g<b''\alpha+g''$, $b''\alpha+g''<b'''\alpha+g'''$, ec. (N.° 414), e però nella (X) avremo $\pi'<\pi''$, $\pi''<\pi'''$, ec.

3.° Per la determinazione degli esponenti β, γ, δ, ec., a cagione del (N.° 398), dovremo nei (N.i 416, 420, 422, 424, 430, 439) tener conto non dei risultati più piccoli, ma dei maggiori, e quindi per essere $\pi'<\pi''$, $\pi''<\pi'''$, ec., le stesse formole ($XVIII$), ($XXIII$) ci daranno tutti gli esponenti, che si ricercano.

Avute queste poche riflessioni, le operazioni, che rimangono a farsi pel nostro intento, sono affatto simili alle passate; e ciò vedremo negli esempj, che seguono.

445. L' Equazion data sia la (XIX). Riduco questa pel (1.° N.° prec.) alla

$$\left.\begin{array}{l} x y^2 + \\ (a^2 + x^2) y \\ - b^3 \end{array}\right| = o$$

faccio $x = \frac{1}{\infty}$, e nel risultato $x y^2 + a^2 y - b^3 = o$ suppongo $y = L x^\alpha$, onde avere $L^2 x^{2\alpha+1} + a^2 L x^\alpha - b^3 = o$. Dalla serie degli esponenti $2\alpha + 1$, α, o pel (1.° N.° prec.) ricavo $\alpha' = -1$, $\alpha'' = o$; tenendo conto del primo di questi valori, osservo, che abbiamo $\frac{l}{k} = -1$, e però $l = -1$, $k = 1$, e ridotta pel (2.° N.° prec.) la (*XIX*) alla

$$\left.\begin{array}{l} x y^2 + a^2 y \\ - b^3 + \\ x^2 y \end{array}\right| = o$$

abbiamo $g' = 1$, $h' = 2$, $g'' = o$, $h'' = o$, $g''' = 2$, $h''' = 1$ (N.° 407), $\pi' = h'\alpha + g' = -1$, $\pi'' = h''\alpha' + g'' = o$, $\pi''' = h'''\alpha' + g''' = 1$. Risultando adunque $\pi' - \pi'' = -1$, $\pi' - \pi''' = -2$, cerco di determinare la serie dei nostri esponenti, e pei (3.° N.° prec., N.° 425) verrà questa ad essere contenuta fra i numeri

$$\begin{array}{c} -1, o, 1, 2, 3, \text{ec.} \\ 1, 2, 3, 4, 5, \text{ec.} \\ 3, 4, 5, 6, 7, \text{ec.} \\ 5, 6, 7, 8, 9, \text{ec.} \\ \text{ec.}, \end{array}$$

onde la nostra serie diverrà

$y = L x^{-1} + M x^o + N x + P x^2 + Q x^3 + R x^4 + S x^5 +$ ec. Ora per la determinazione dei coeffi-

cien-

cienti mi servo del metodo istesso dei (N.[i] 426, 427), e otterrò finalmente per la serie richiesta la

$$y = -a^2 x^{-1} - \frac{b^3}{a^2} + \left(\frac{b^6 - a^6}{a^6}\right) x + \left(\frac{a^6 b^3 - 2 b^9}{a^{10}}\right) x^2 +$$

$$\left(\frac{5 b^{12} - 3 a^6 b^6}{a^{14}}\right) x^3 + \left(\frac{16 a^6 b^9 - 3 a^{12} b^3 - 18 b^{15}}{a^{18}}\right) x^4 +$$

$$\left(\frac{10 a^{12} b^6 - 47 a^6 b^{12} + 50 b^{18}}{a^{22}}\right) x^5 + \text{ec.}$$

Passando all' altro valore $\alpha'' = 0$, col calcolo istesso troveremo

$$y = \frac{b^3}{a^2} - \frac{b^6}{a^6} x + \left(\frac{2 b^9 - a^6 b^3}{a^{10}}\right) x^2 +$$

$$\left(\frac{3 a^6 b^6 - 5 b^{12}}{a^{14}}\right) x^3 + \left(\frac{14 b^{15} - 10 a^6 b^9 + a^{12} b^3}{a^{18}}\right) x^4 +$$

$$\left(\frac{35 a^6 b^{12} - 6 a^{12} b^6 - 42 b^{18}}{a^{22}}\right) x^5 + \text{ec.}$$

Se l' Equazione data sia la seguente $8 x^2 y^2 + 32 y^2 + 8 x^3 y + 64 x y - x^7 + 32 x^2 = 0$. Trovandosi, che in essa la L à entrambi i suoi valori uguali fra loro, si applica quì pure quanto si disse nel (N.° 433), e dovremo perciò eseguire il calcolo, come nel (N.° 434); onde per y troveremo i due valori

$$y = -x + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{2 x^5}{16} + \frac{2 x^6}{32} - \frac{7 x^7}{64} + \text{ec.}$$

$$y = -x - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{16} - \frac{2 x^6}{32} + \frac{4 x^7}{64} + \text{ec.}$$

446. Queste ultime serie, nelle quali gli esponenti della x vanno sempre aumentandosi, si dicono *ascendenti*, e le prime, nelle quali gli esponenti

nenti della x van decrescendo, diconsi *discendenti*. Per la natura delle potenze le discendenti ànno la proprietà di convergere tanto più verso il vero valore della y, quanto è più grande il valore, che attribuiscesi alla x: ma allorchè alla x si dà un valor troppo piccolo, le nostre serie divengono necessariamente divergenti, e divengono quindi inutili, onde avere per approssimazione i valori corrispondenti della y. Allorquando però mancano le serie discendenti, ricorrer possiamo alle ascendenti; queste al contrario delle prime tanto più son convergenti, quanto è più piccolo il valor della x, e divengono poi divergenti, mentre alla x attribuisconsi dei valori troppo grandi. Sì le une adunque, che le altre son necessarie a trovarsi, affine di avere la soluzione, che si richiede della $Z=0$.

CAPO DECIMONONO.

Della Soluzione per serie delle Equazioni algebraiche determinate.

447. Trovare una formola generale, ed un metodo spedito, onde elevare ad una qualunque potenza b la quantità

$$(I)\ y = Lx^{\alpha} + Mx^{\alpha-1} + Nx^{\alpha-2} + Px^{\alpha-3} + Qx^{\alpha-4} + Rx^{\alpha-5} + \text{ec.}.$$

Alla

Alla soluzione di questo Problema conviene premettere le riflessioni seguenti.

Elevando ad una qualunque potenza h la quantità $Lx^{\alpha} + Mx^{\beta} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta} + Qx^{\varepsilon} +$ ec., sappiamo, che un qualsivoglia termine del risultato viene espresso dal termine generale (*II*) Tavola A (*), in cui gli esponenti a, b, c, d, e, ec. sono tutti numeri interi positivi, e la loro somma è $= h$. Ora nel nostro caso abbiamo $\beta = \alpha - 1$, $\gamma = \alpha - 2$, $\delta = \alpha - 3$, $\varepsilon = \alpha - 4$, ec.. Dunque sostituendo ne verrà l' esponente $a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon +$ ec. $= a\alpha + b(\alpha - 1) + c(\alpha - 2) + d(\alpha - 3) + e(\alpha - 4) +$ ec. $=$
$(a + b + c + d + e +$ ec.$)\,\alpha -$
$(b + 2c + 3d + 4e +$ ec.$) = h\alpha -$
$(b + 2c + 3d + 4e +$ ec.$)$; e per conseguenza,
(*III*) supposto $b + 2c + 3d + 4e +$ ec. $= g$, in un termine qualunque della nostra potenza l' esponente della x dovrà essere della forma $h\alpha - g$.

448. Supponghiam le Equazioni

$a + b + c + d + e + f +$ ec. $= h$
$b + c + d + e + f +$ ec. $= q$
$c + d + e + f +$ ec. $= r$
(*IV*) $d + e + f +$ ec. $= s$
$e + f +$ ec. $= t$
$f +$ ec. $= u$
ec.

La prima di queste Equazioni non è che l' accennata nel (N.° prec.). Sottraendo poi la seconda dalla

(*) Vedi la Tavola posta in fine del Capo.

dalla prima, la terza dalla seconda, la quarta dalla terza, ec., ne vengono i risultati $a = b - q$, $b = q - r$, $c = r - s$, $d = s - t$, $e = t - u$, ec.: dunque $b - q$, $q - r$, $r - s$, $s - t$, $t - u$, ec. altro non sono, che gli esponenti delle successive quantità L, M, N, P, Q, ec., e per conseguenza l' esponente della L non potrà essere $> b$, l' esponente della M non potrà essere $> q$, quella della N non potrà essere $> r$, ec.

449. Corrispondentemente a un dato esponente $b\alpha - g$ della x (N.° 447), essendo $b - q$ l' esponente della L (N.° prec.), non potrà giammai risultare $q > g$.

Allorchè nella nostra potenza si eleva il termine L x^α alla podestà $b - q$, supponghiamo che resti moltiplicato col termine T $x^{\alpha - k}$ elevato alla potenza r, con l' altro T' $x^{\alpha - k'}$ alla podestà r', col terzo T'' $x^{\alpha - k''}$ alla podestà r'', ec.: ciò essendo, l' esponente della x nel risultato sarà

$(b - q)\alpha + r(\alpha - k) + r'(\alpha - k') + r''(\alpha - k'')$
$+ \text{ec.} = (b - q + r + r' + r'' + \text{ec.})\alpha$
$- (rk + r'k' + r''k'' + \text{ec.})$, e però avendosi
$(b - q + r + r' + r'' + \text{ec.})\alpha$
$- (rk + r'k' + r''k'' + \text{ec.}) = b\alpha - g$, otterremo $b - q + r + r' + r'' + \text{ec.} = b$, $rk + r'k' + r''k'' + \text{ec.} = g$, e quindi $q = r + r' + r'' + r''' + \text{ec.}$ Ora per essere r, r', r'', ec., k, k', k'', ec. tutti numeri interi, e positivi, non può mai riescire $rk + r'k' + r''k'' < r + r' + r'' + \text{ec.}$; dunque

non

non potrà essere neppure $q>g$.

450. Essendo l' esponente $a=b-q$, il susseguente b o sarà $=q$, o minore (N.° 448); se gli è uguale, allora tutti gli altri esponenti c, d, e, f, ec. uguaglieranno lo zero; se poi gli è minore, allora avendosi $b=q-r$ (N.° 448), dovrà risultare $c=r$, oppure $c<r$; se $c=r$, ne verrà $d=0$, $e=0$, $f=0$, ec.; che se $c<r$, risultando $c=r-s$, nuovamente sarà $d=s$, ovvero $d<s$; nel primo caso avremo $e=0$, $f=0$, ec., nel secondo $d=s-t$, e quindi l' esponente e, o si vuole $=$, oppure $<t$; se $e=t$, ne viene $f=0$, ec., e se $e<t$, potremo proseguire innanzi le medesime riflessioni.

Inoltre nel caso, che sia $b=q$, dalla (*III*) vedesi che dovrà risultare $b=g$; allorquando poi $b<q$, se si vuole $c=r$, per la stessa (*III*) dovrà essere $b+2c=g$; che se $c<r$, e $d=s$, dovrà venirne $b+2c+3d=g$; nel caso che $d<s$, se sia $e=t$, avremo $b+2c+3d+4e=g$; così nella ipotesi della $f=u$, ne verrà $b+2c+3d+4e+5f=g$; e così in progresso.

Dunque 1.° non potrà essere $b=q$, che quando $q=g$.

2.° Nel caso che $b<q$, e $c=r$ ci risulta $b+2c=g$, $b+c=q$: moltiplico ora la seconda di queste Equazioni per 2, sottraggo da essa la prima, e otterremo $b=2q-g$; ma $c=\frac{g-b}{2}$, dunque sostituendo sarà $c=g-q$.

3.° Allorquando $c < r$, se si vuole $d = s$, avremo $b + c + d = q$. Ora sottraendo questa Equazione moltiplicata per 3 dall' altra $b + 2c + 3d = g$ (N.° prec.), ottiensi $2b + c = 3q - g$; dunque essendo $b = q - r$ (N.° 448), ne verrà $c = q - g + 2r$, e a cagione di $d = \frac{g - b - 2c}{3}$, ricaveremo $d = g - q - r$.

4.° Nella ipotesi della $d < s$, e della $e = t$, risultando $b + c + d + e = q$, $b + 2c + 3d + 4e = g$, ci verrà $3b + 2c + d = 4q - g$; ma $b = q - r$, $c = r - s$ (N.° 448); dunque $d = q - g + r + 2s$; e avendosi $e = \frac{g - b - 2c - 3d}{4}$, otterremo $e = g - q - r - s$.

5.° Quando $e < t$, ed $f = u$, dalle $b + c + d + e + f = q$, $b + 2c + 3d + 4e + 5f = g$ avremo $4b + 3c + 2d + e = 5q - g$, e quindi pel (N.° 448) ci risulterà $e = q - g + r + s + 2t$, $f = g - q - r - s - t$.

Lo stesso si dice in seguito.

452. Supposto $g - q = \varphi'$, $g - q - r = \varphi''$, $g - q - r - s = \varphi'''$, $g - q - r - s - t = \varphi^{iv}$, ec., da quanto si è detto finora vedesi, che nel coefficiente di x^{ba-g} le potenze, e i prodotti dei coefficienti M, N, P, Q, R, ec., che moltiplicano L^{b-q} non ponno che essere i seguenti

M^{q}, $M^{2q-g} N^{g-q}$, $M^{q-r} N^{2r-\varphi'} P^{\varphi'-r}$,

$M^{q-r} N^{r-s} P^{2s-\varphi''} Q^{\varphi''-s}$,

$M^{q-r} N^{r-s} P^{s-t} Q^{2t-\varphi'''} R^{\varphi'''-t}$, ec. Dunque trascuracurati per ora a maggior comodo i coefficienti, e i divisori numerici, quella porzione di esso coefficiente, che moltiplica L^{h-q}, sarà espressa in generale dalla Formola

$$(V)\quad L^{h-q}\left(M^{q}+M^{2q-g}N^{g-q}+M^{q-r}N^{2r-\varphi'}P^{\varphi'-r}+M^{q-r}N^{r-s}P^{2s-\varphi''}Q^{\varphi''-s}+M^{q-r}N^{r-s}P^{s-t}Q^{2t-\varphi'''}R^{\varphi'''-t}+\text{ec.}\right),$$

Formola, nella quale 1.° gli esponenti debbono essere tutti numeri interi, e positivi (N.° 447). 2.° Il termine secondo deve necessariamente contenere il coefficiente N (N.i 450, 451), il terzo deve contenere il coefficiente P, il quarto il coefficiente Q, il quinto il coefficiente R, ec..

3.° Finalmente non tutti i termini della Formola sussistono in una volta, ma di essi ora sussitono gli uni, ed ora gli altri giusta i valori diversi delle q, r, s, t, ec.; secondo poi la diversità di tali valori da un solo termine della (V) possono derivarne varii.

453. Dunque se dando alle quantità q, r, s, t, ec. certi valori, qualcuno degli esponenti $q-r$, $r-s$, $s-t$, ec. diventa negativo, e qualcuno dei $g-q$, $\varphi'-r$, $\varphi''-s$, $\varphi'''-t$, ec. diventa zero; allora nella Formola non esiste nè il termine, nel quale esso esponente diviene rispettivamente negativo, o zero, nè i susseguenti. Che se diventa negativa qualcheduna delle quantità $2q-g$, $2r-\varphi'$, $2s-\varphi''$, $2t-\varphi'''$, ec., in tal caso mancherà bensì il termine, in cui questa quan-

tità si fa negativa, ma possono sussistere alcuni dei termini, che seguono. Tutto questo apparisce dalla Formola stessa (V), e da quanto si è detto nel (N.° prec.)

454. Attribuiscansi successivamente alla q i valori esposti in (VI) nella prima colonna verticale fino inclusivamente allo zero. Poichè le quantità r, s, t, ec. non sono legate ad altra condizione, che a quella di essere interi, e di rendere ciascuno degli esponenti $q-r$, $r-s$, $s-t$, ec., $2q-g$, $2r-\varphi'$, $2s-\varphi''$, $2t-\varphi'''$, ec. ec. >-1, e ciascuno degli altri $g-q$, $\varphi'-r$, $\varphi''-s$, $\varphi'''-t$, ec. >0, attribuisco successivamente ad esse r, s, t, ec. i valori a ciò opportuni, avendo sempre in vista quanto si è detto nei (N.[i] prec.[i]), e specialmente nel (N.° 453); e con tali operazioni troveremo non difficilmente risultarci dalla formola (V) le quantità esposte in (VI) nelle linee corrispondenti ai successivi valori della q.

(VI)

$q=g$, $L^{h-g}M^{g}$

$q=g-1$, $L^{h-(g-1)}M^{g-2}N$

$q=g-2$, $L^{h-(g-2)}(M^{g-4}N^{2}+M^{g-3}P)$

$q=g-3$, $L^{h-(g-3)}(M^{g-6}N^{3}+M^{g-5}NP+M^{g-4}Q)$

$q=g-4$, $L^{h-(g-4)}(M^{g-8}N^{4}+M^{g-7}N^{2}P+M^{g-6}P^{2}+M^{g-6}NQ+M^{g-5}R)$

$q=$

$$q = g - 5 \,,\; L^{h-(g-5)}\,(M^{g-10}N^5 + M^{g-9}N^3P + M^{g-8}NP^2 + M^{g-8}N^2Q + M^{g-7}PQ + M^{g-7}NR + M^{g-6}S)$$

$$q = g - 6 \,,\; L^{h-(g-6)}\,(M^{g-12}N^6 + M^{g-11}N^4P + M^{g-10}N^2P^2 + M^{g-10}N^3Q + M^{g-9}P^3 + M^{g-9}NPQ + M^{g-9}N^2R + M^{g-8}Q^2 + M^{g-8}PR + M^{g-8}NS + M^{g-7}T)$$

$$q = g - 7 \,,\; L^{h-(g-7)}\,(M^{g-14}N^7 + M^{g-13}N^5P + M^{g-12}N^3P^2 + M^{g-12}N^4Q + M^{g-11}NP^3 + M^{g-11}N^2PQ + M^{g-11}N^3R + M^{g-10}P^2Q + M^{g-10}NQ^2 + M^{g-10}NPR + M^{g-10}N^2S + M^{g-9}QR + M^{g-9}PS + M^{g-9}NT + M^{g-8}U)$$

$$q = g - 8 \,,\; L^{h-(g-7)}\,(M^{g-16}N^8 + M^{g-15}N^6P + M^{g-14}N^4P^2 + M^{g-14}N^5Q + M^{g-13}N^2P^3 + M^{g-13}N^3PQ + M^{g-13}N^4R + M^{g-12}P^4 + M^{g-12}NP^2Q + M^{g-12}N^2Q^2 + M^{g-12}N^2PR + M^{g-12}N^3S + M^{g-11}PQ^2 + M^{g-11}P^2R + M^{g-11}NQR + M^{g-11}NPS + M^{g-11}N^2T + M^{g-10}R^2 + M^{g-10}QS + M^{g-10}PT + M^{g-10}NU + M^{g-9}V)$$

ec. ec. ec.

455. Volendosi raccogliere tutti questi risultati (*VI*), osservo procedere essi con una certa regola, per cui potremo non difficilmente unirli tutti insieme, proseguendoli fino alla supposizio-

ne

ne di $q = o$, indipendentemente dalla formola (V) nella maniera, che segue.

Scritto primieramente in (VII) Tavola A il primo termine $L^{h-g} M^{g}$, pongo al dissotto in una prima riga tutti i termini $L^{h-(g-1)} M^{g-2} N$, $L^{h-(g-2)} M^{g-3} P$, $L^{h-(g-3)} M^{g-4} Q$, ec., che in (VI) occupano l' ultimo luogo dei risultati successivi; ma per maggiore semplicità scrivo questi termini collocando fra due parentesi le quantità N, $L M^{-1} P$, $L^{2} M^{-2} Q$, ec., e apponendo al principio, come fattor comune, il termine $L^{h-(g-1)} M^{g-2}$, e al fine la unità.

Accresco in seguito nell' accennato $L^{h-(g-1)} M^{g-2}$ di 1 l' esponente della L, diminuisco di 2 l' esponente della M, e scritto il risultato $L^{h-(g-2)} M^{g-4}$ in una seconda riga, pongo presso di questo fra due parentesi i termini esistenti fra le parentesi della riga precedente: finalmente moltiplicata per N la unità posta alla destra della linea prima, colloco il risultato N nel fine della riga seconda. Perchè poi fra le parentesi di questa seconda riga non tornerei che a scrivere gli stessi termini della prima, lascierò vuoto il luogo compreso fra tali parentesi, intendendo, che debba questo venire occupato dai termini, che vi stanno sopra; e per distinguere le due righe tirerò fra esse una linea punteggiata.

Aumentato nuovamente in $L^{h-(g-2)} M^{g-4}$ di 1 l' esponente della L, e diminuito di 2 l' esponente della M, ripongo il termine $L^{h-(g-3)} M^{g-6}$ in

una

una terza riga, vi scrivo appresso fra due parentesi gli stessi termini della riga prima, o per meglio dire intendo che tali termini debbansi comprendere fra le parentesi della riga terza lasciate esser pur vuote, come le precedenti, e tiro fra la seconda, e la terza riga una linea punteggiata. In seguito moltiplicata per N la quantità N, che è posta al fine della riga seconda, moltiplicata per M P la unità posta alla destra della riga prima, moltiplico per N^2 tutti i termini della terza riga, e moltiplico per M P i termini stessi, toltone il primo N. Affine poi d' indicare con brevità i termini, che moltiplicano M P, senza scriverli di nuovo, ò poste, seguendo l' accennata regola, al dissotto delle terze parentesi altre due parentesi, la prima delle quali escluda il primo termine N; e intendo che entro delle medesime vengano oppurtunamente comprese le quantità, che nella prima riga esistonvi sopra. Perchè poi tanto le quantità appartenenti alle terze parentesi, come quelle, le quali spettano alle quarte, si devono moltiplicare per $L^{b-(g-3)} M^{g-6}$, perciò considero, che tutte queste insieme formino una sola riga divisa in due parti, e segno la linea punteggiata sotto delle parentesi quarte.

Proseguendo col metodo istesso, s' immaginino scritti fra due parentesi opportunamente collocate in una quarta riga i termini esistenti fra le parentesi della prima, e pongasi innanzi, come precedentemente, il termine $L^{b-(g-4)} M^{g-8}$. Ciò fatto, si moltiplichi per N la quantità N^2 apposta alla prima parte della riga terza; per M P la quantità N apposta alla riga seconda, e per $M^2 Q$ la quantità 1 apposta alla riga prima, e avuti i tre risultati N^3, MNP, $M^2 Q$, si moltiplichi pel primo tutta la riga quarta, pel secondo la stessa riga diminuita del primo termine N, e pel terzo essa medesima diminuita dei primi due termini N, $LM^{-1}P$. Per brevità poi di scrivere indicheremo simili moltiplicazioni, come precedentemente. Osservando poi, che la riga quarta è formata di tre parti, e che ciascuna di queste deve moltiplicarsi per $L^{b-(g-4)} M^{g-8}$, perciò tiro al dissotto delle ultime parentesi la solita linea punteggiata.

Formo nella solita guisa la quinta riga, ma la formo, componendola di cinque parti; poscia moltiplico per N la quantità N^3 apposta alla parte prima della riga quarta, per M P le due N^2, MP spettanti alla riga terza, per $M^2 Q$ la N spettante alla riga seconda, e per $M^3 R$ l' unità appartenente alla riga prima; e ottenuti i prodotti N^4, $MN^2P + M^2P^2$, M^2NQ, M^3R, moltiplico pel primo di essi la prima parte della riga quinta, moltiplico pel secondo la parte seconda, pel terzo la terza, e pel quarto la quarta.

Passando a formare la riga sesta, scrivo questa secondo la solita regola, componendola di cinque parti: in seguito moltiplicata per N la quantità N^4 annessa alla parte prima della riga quinta, moltiplicate per M P le due N^3, MNP spettanti alle pri-

prime due parti della quarta linea, per $M^2 Q$ le N^2, MP apposte alla riga terza, per $M^3 R$ la N appartenente alla riga seconda, e finalmente per $M^4 S$ la unità della riga prima, porrò il primo di questi prodotti nella riga sesta al fine della prima parte, il prodotto secondo al fine della parte seconda, il terzo al fine della terza, e così di seguito.

In generale, seguendo sempre lo stesso metodo, otterrò una riga qualunque, per esempio la *mesima*. A tal fine non avrò che a comporre essa in primo luogo di $m-1$ parti; poscia moltiplicherò tutta la medesima per $L^{b-(g-m)} L^{g-2m}$; e finalmente moltiplicata per N la quantità apposta alla prima parte della riga $m-1$ *esima*, moltiplicate per MP le due quantità esistenti alla destra delle prime due parti della $m-2$ *esima* riga, per $M^2 Q$ le tre quantità appartenenti alle tre prime parti della $m-3$ *esima* riga, per $M^3 R$ le quantità spettanti alle quattro parti prime della riga $m-4$ *esima*, e così in progresso, collocherò tutti questi prodotti al fine della nostra riga *mesima*, ponendo il primo al fine della parte prima, il secondo alla destra della seconda, il terzo al fine della terza, e così di seguito.

Col proseguire ad operare in tal guisa fino inclusivamente alla riga *gesima*, verremo a scrivere il complesso di tutti i termini (*VI*), e la ragione di questa operazione deducesi dall' osservare attentamente l' andamento dei termini medesimi. Conviene però avvertire, che nell' effettuare in

(*VII*) le indicate moltiplicazioni, dovremo pel (1.° N.° 452) tener conto in ciascuna riga non già di tutti i termini, ma di quei soltanto, nei quali gli esponenti della M risultano non negativi. Perciò tra le parentesi della prima riga estenderemo i termini N, L M^{-1} P, ec. fino a quello inclusivamente, in cui l' esponente della M diviene $-(g-2)$. Entro le parentesi della riga seconda non oltrepasseremo il termine, in cui l' esponente della M diventa $-(g-4)$. I termini fra le parentesi della riga terza si proseguiranno nella prima parte fino all' esponente $-(g-6)$ della M, e nella parte seconda fino all' esponente $-(g-5)$. Così nella riga quarta gli accennati termini si estenderanno nella prima parte fino all' esponente $-(g-8)$, nella parte seconda fino all' esponente $-(g-7)$, e nella terza fino all' esponente $-(g-6)$. La riga quinta conterrà tali termini fino a quello nella prima parte, che à l' esponente $-(g-10)$; li conterrà nella parte seconda fino al termine, il cui esponente è $-(g-9)$, allorchè essa parte si moltiplica per M N^2 P, e fino al termine di esponente $-(g-8)$, quando tal parte viene a moltiplicarsi per M^2 P^2; essi termini poi nella parte terza si proseguiranno sino all' esponente $-(g-8)$, e sino all' altro $-(g-7)$ nella parte quarta. Le stesse riflessioni devonsi sempre eseguire rapporto alle righe susseguenti.

456. Chiamiamo Π tutta la quantità espressa in (*VII*) Tavola A, e chiamati Π′, Π″, Π‴, Π^v, ec.

ec. i risultati, che da questa si ànno per la successiva supposizione di $g = 0, 1, 2, 3$, ec., otterrò

$$\Pi' = L^b,$$

$$\Pi'' = L^{b-1} M,$$

$$\Pi''' = L^{b-2} M^2 + L^{b-1} N,$$

$$\Pi^{iv} = L^{b-3} M^3 + L^{b-2} M N + L^{b-1} P,$$

$$\Pi^{v} = L^{b-4} M^4 + L^{b-3} M^2 N + L^{b-2} M P + L^{b-1} Q + L^{b-2} N^2,$$

$$\Pi^{vi} = L^{b-5} M^5 + L^{b-4} M^3 N + L^{b-3} M^2 P + L^{b-2} M Q + L^{b-1} R + L^{b-3} M N^2 + L^{b-2} N P,$$

$$(VIII)\ \Pi^{vii} = L^{b-6} M^6 + L^{b-5} M^4 N + L^{b-4} M^3 P + L^{b-3} M^2 Q + L^{b-2} M R + L^{b-1} S + L^{b-4} M^2 N^2 + L^{b-3} M N P + L^{b-2} N Q + L^{b-3} N^3 + L^{b-2} P^2,$$

$$\Pi^{viii} = L^{b-7} M^7 + L^{b-6} M^5 N + L^{b-5} M^4 P + L^{b-4} M^3 Q + L^{b-3} M^2 R + L^{b-2} M S + L^{b-1} T + L^{b-5} M^3 N^2 + L^{b-4} M^2 N P + L^{b-3} M N Q + L^{b-2} N R + L^{b-4} M N^3 + L^{b-3} N^2 P + L^{b-3} M P^2 + L^{b-2} P Q,$$

$$\Pi^{ix} = L^{b-8} M^8 + L^{b-7} M^6 N + L^{b-6} M^5 P + L^{b-5} M^4 Q + L^{b-4} M^3 R + L^{b-3} M^2 S + L^{b-2} M T + L^{b-1} U + L^{b-6} M^4 N^2 + L^{b-5} M^3 N P + L^{b-4} M^2 N Q + L^{b-3} M N R + L^{b-2} N S + L^{b-5} M^2 N^3 + L^{b-4} M N^2 P + L^{b-3} N^2 Q + L^{b-4} M^2 P^2 + L^{b-3} M P Q + L^{b-2} P R + L^{b-4} N^4 + L^{b-3} N P^2 + L^{b-2} Q^2,$$

ec. ec. ec.

457. Chiamisi ora $\Pi\,1$ ciò, che diviene Π, aggiungendovi giusta la formula (*II*) Tavola A gli opportuni coefficienti, e divisori numerici (N.° 452), Ciò fatto, $\Pi\,1\,x^{b\alpha-g}$ non sarà che un termine generale della potenza y^b (N.° 452). Dunque la formola (*VII*) Tavola A quella sarà, che scioglie per lo meno la prima parte del Problema del (N.° 447); imperciocchè, determinate col mezzo di tal formola le quantità (*VIII*), aggiungo in ciascuna d' esse giusta la (*II*) i dovuti divisori, e coefficienti numerici, e i risultati, che ne vengono, chiamati $\Pi'\,1$, $\Pi''\,1$, $\Pi'''\,1$, $\Pi^{IV}\,1$, ec. altro non saranno che i rispettivi coefficienti delle potenze $x^{b\alpha}$, $x^{b\alpha-1}$, $x^{b\alpha-2}$, $x^{b\alpha-3}$, ec.; onde avendosi

$$\Pi'\,1 = \frac{1.2.3\ldots b}{1.2.3\ldots b} L^b = L^b$$

$$\Pi''\,1 = \frac{1.2.3\ldots b}{1.2.3\ldots(b-1).1} L^{b-1} M = b L^{b-1} M$$

$$\Pi'''\,1 = \frac{1.2.3\ldots b}{1.2.3\ldots(b-2).1.2} L^{b-2} M^2 + \frac{1.2.3\ldots b}{1.2.3\ldots(b-1).1} L^{b-1} N = \frac{b(b-1)}{1.2} L^{b-2} M^2 + b L^{b-1} N,$$

$$(IX)\quad \Pi^{IV}\,1 = \frac{b(b-)(b-2)}{1.2.3} L^{b-3} M^3 + b(b-1) L^{b-2} M N + b L^{b-1} P,$$

$\Pi^{V}\,1$

$$\Pi^{v}\,1 = \frac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}L^{b-4}M^4 + \frac{b(b-1)(b-2)}{1\cdot2}L^{b-3}M^2N + b(b-1)L^{b-2}\left(MP+\frac{N^2}{2}\right)+bL^{b-1}Q,$$

$$\Pi^{vi}\,1 = \frac{b(b-1)(b-2)(b-3)(b-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}L^{b-5}M^5 + \frac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{1\cdot2\cdot3}L^{b-4}M^3N + b(b-1)(b-2)L^{b-3}\left(\frac{M^2P}{1\cdot2}+\frac{MN^2}{1\cdot2}\right)+ b(b-1)L^{b-2}(MQ+NP)+bL^{b-1}R,$$

$$\Pi^{vii}\,1 = \frac{b(b-1)(b-2)\ldots(b-5)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}L^{b-6}M^6 + \frac{b(b-1)\ldots(b-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}L^{b-5}M^4N + b(b-1)(b-2)(b-3)L^{b-4}\left(\frac{M^3P}{1\cdot2\cdot3}+\frac{M^2N^2}{1\cdot2\cdot1\cdot2}\right)+b(b-1)(b-2)L^{b-3}\left(\frac{M^2Q}{1\cdot2}+MNP+\frac{N^3}{1\cdot2\cdot3}\right)+ b(b-1)L^{b-2}\left(MR+NQ+\frac{P^2}{1\cdot2}\right)+ bL^{b-1}S$$

ec. ec. ec.

Sarà

Sarà

$$(X)\, y^b = (L x^{\alpha} + M x^{\alpha-1} + N x^{\alpha-2} + P x^{\alpha-3} + Q x^{\alpha-4}$$
$$+ R x^{\alpha-5} + S x^{\alpha-6} + \text{ec.})^b = L^b x^{b\alpha} +$$
$$b L^{b-1} M x^{b\alpha-1} + \left(\frac{b(b-1)}{1.2} L^{b-2} M^2 +\right.$$
$$\left. b L^{b-1} N\right) x^{b\alpha-2} + \left(\frac{b(b-1)(b-2)}{1.2.3} L^{b-3} M^3 +\right.$$
$$\left. b(b-1) L^{b-2} M N + b L^{b-1} P\right) x^{b\alpha-3} +$$
$$\left(\frac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{1.2.3.4} L^{b-4} M_4 + \frac{b(b-1)(b-2)}{1.2}\right.$$
$$L^{b-3} M^2 N + b(b-1) L^{b-2}\left(M P + \frac{N^2}{1.2}\right) +$$
$$\left. b L^{b-1} Q\right) x^{b\alpha-4} + \left(\frac{b(b-1)(b-2)(b-3)(b-4)}{1.2.3.4.5}\right.$$
$$L^{b-5} M^5 + \frac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{1.2.3} L^{b-4} M^3 N$$
$$+ b(b-1)(b-2) L^{b-3}\left(\frac{M^2 P}{1.2} + \frac{M N^2}{1.2}\right) +$$
$$\left. b(b-1) L^{b-2}(M Q + N P) + b L^{b-1} R\right) x^{b\alpha-5} +$$
$$\left(\frac{b(b-1)\ldots\ldots(b-5)}{1.2.3.4.5.6} L^{b-6} M^6 + \frac{b(b-1)\ldots(b-4)}{1.2.3.4}\right.$$
$$L^{b-5} M^4 N + b(b-1)(b-2)(b-3) L^{b-4}$$
$$\left(\frac{M^3 P}{1.2.3} + \frac{M^2 N^2}{1.2.1.2}\right) + b(b-1)(b-2) L^{b-3}$$
$$\left(\frac{M^2 Q}{1.2} + M N P + \frac{N^3}{1.2.3}\right) + b(b-1) L^{b-2}$$
$$\left.\left(M R + N Q \frac{P^2}{1.2}\right) + b L^{b-1} S\right) x^{b\alpha-6} + \text{ec.}$$

ec. ec. ec.

Se sia $b = 3$, otterremo

$$y^3 = (L x^{\alpha} + M x^{\alpha-1} + N x^{\alpha-2} + P x^{\alpha-3} + Q x^{\alpha-4} + R x^{\alpha-5} + S x^{\alpha-6} + \text{ec.})^3 = L^3 x^{3\alpha} + 3 L^2 M x^{3\alpha-1} + (3 L M^2 + 3 L^2 N) x^{3\alpha-2} + (M^3 + 6 L M N + 3 L^2 P) x^{3\alpha-3} + \left(3 M^2 N + 6 L \left(M P + \frac{N^2}{2}\right) + 3 L^2 Q\right) x^{3\alpha-4} + \left(6\left(\frac{M^2 P}{2} + \frac{M N^2}{2}\right) + 6 L (M Q + N P) + 3 L^2 R\right) x^{3\alpha-5} + \left(6\left(\frac{M^2 Q}{2} + M N P + \frac{N^3}{6}\right) + 6 L \left(M R + N Q + \frac{P^2}{2}\right) + 3 L^2 S\right) x^{3\alpha-6} + \text{ec.}$$

458. Osservando l' andamento della quantità (*VIII*), (*IX*), potremo, senza ricorrere alla Tavola A determinar le medesime assai semplicemente. Imperciocchè nella (*VIII*) veggo sussistere costantemente tal regola, che una qualunque di quelle quantità per esempio la $\Pi^{(m)}$ resta determinata col moltiplicare tutta la $\Pi^{(m-1)}$ per $L^{-1} M$; moltiplicando tutti i termini della $\Pi^{(m-2)}$, che son privi di M, per $L^{-1} N$; moltiplicando tutti i termini della $\Pi^{(m-3)}$ mancanti e della M, e della N per $L^{-1} P$; moltiplicando per $L^{-1} Q$ tutti i termini della $\Pi^{(m-4)}$, che son privi delle tre quantità M, N, P, e così di seguito fino alla Π', e poi col sommare insieme tutti i risultati, che ne provengono. Quindi scritta la $\Pi' = L^b$ otterremo Π'', moltiplicando essa per $L^{-1} M$; ci risulterà la Π''',

col

col moltiplicare la Π'' per $L^{-1}M$, e per $L^{-1}N$ la Π'; ricaveremo la Π^{iv}, moltiplicando per $L^{-1}M$ tutta la Π''', e per $L^{-1}P$ la Π'; si avrà la Π^{v} col moltiplicare tutta la Π^{iv} per $L^{-1}M$, il termine della Π''' mancante di M per $L^{-1}N$, la Π'' per $L^{-1}P$, e la Π' per $L^{-1}Q$, e così in progresso.

In quanto poi alle quantità (*IX*) esse ottengonsi, come le (*VIII*), con questo di più, che nella formazione di ciascun termine, deve questo dividersi per gli esponenti, che in esso acquistano le quantità M, N, P, ec.; e deve moltiplicarsi per l' esponente della L nel termine, da cui deriva. Così mentre dal termine $bL^{b-1}P$ in Π^{v} 1 ricavo giusta la regola precedente il suo corrispondente in Π^{vii} 1, nel moltiplicare per $L^{-1}P$, moltiplico ancora per $b-1$ esponente della L in $bL^{b-1}P$, e divido per 2 esponente della P nel termine, che risulta.

In conseguenza di questa regola semplicissima vedesi pel (N.° 457), che noi possiamo con somma facilità innalzare alla potenza b la quantità (*I*), e che quindi per essa resta risoluta la seconda parte del Problema propostoci nel (N.° 447).

459. Nella ipotesi, che la (*I*) sia mancante di qualche termine, considero la quantità, come se i termini mancanti vi fossero, opero come precedentemente, e nel risultato, che ottiensi, pongo lo zero in luogo di quei coefficienti, che corrispondono ai termini non esistenti. Se sia per esempio $y = Lx^{\alpha} + Mx^{\alpha-1} + Px^{\alpha-3} + Rx^{\alpha-5} + Sx^{\alpha-6} +$ ec., ed $b = 3$, dall' esempio precedente

avre-

avremo $y^3 = L^3 x^{3\alpha} + 3 L^2 M x^{3\alpha-1} + 3 L M^2 x^{3\alpha-2} + (M^3 + 3 L^2 P) x^{3\alpha-3} + 6 L M P x^{3\alpha-4} + (3 M^2 P + 3 L^2 R) x^{3\alpha-5} + (6 L M R + 3 L P^2 + 3 L^2 S) x^{3\alpha-6} +$ ec.

460. Se la (I) abbia la forma
$y = L x^{\alpha} + M x^{\alpha+1} + N x^{\alpha+3} + Q x^{\alpha+4} +$ ec., troveremo, come nei (numeri precedenti), che le varie potenze della x nella y^b sono le $x^{b\alpha}$, $x^{b\alpha+1}$, $x^{b\alpha+2}$, $x^{b\alpha+3}$, ec., e che gli stessi coefficienti (IX) sono i coefficienti rispettivi di queste diverse potenze, essendo $\Pi\,1\,x^{b\alpha+g}$ il termine generale di y^b (N.° 457), e deducendosi tal quantità $\Pi\,1$, come nel (citato N.° 457), dalla Π, ossia dalla Formola (VII) Tavola A.

461. Moltiplicando il termine $\Pi\,1\,x^{b\alpha-g}$ (N.° 457) per $F^{(p)} x^p$, avremo il prodotto $F^{(p)} \Pi\,1\,x^{b\alpha+p-g}$. Ora eleviamo la ($I$) ad una podestà $i = b \pm k$, e del risultato, che viene, preso un termine qualunque, che chiamerò $\Theta\,1\,x^{i\alpha-l}$, vogliasi determinare la l per modo, che moltiplicato $\Theta\,1\,x^{i\alpha-l}$ per $F^{(q)} x^q$, ne venga un termine, il cui esponente uguagli l' esponente di $F^{(p)}.\Pi\,1\,x^{b\alpha+p-g}$. Suppongo perciò $i\alpha + q - l = b\alpha + p - g$, e troveremo dover essere $l = q - p + g \pm k\alpha$. Volendo poi determinare in corrispondenza il coefficiente $\Theta\,1$, ci serviremo delle stesse formole (VII), (II) Tavola A collocando i in luogo di b, ed l invece della g.

462. Sia $q = p \mp k\alpha - \frac{k(k \pm 1)}{2}$, e però

 $l =$

$l = g - \frac{k(k \pm 1)}{2}$: quindi ci risulta $L^{i-l} M^{l} =$ $L^{h \pm k - g + \frac{k(k \pm 1)}{2}} M^{g - \frac{k(k \pm 1)}{2}} = L^{h-g} M^{g} \times L^{\frac{k(k \pm 3)}{2}}$ $M^{-\frac{k(k \pm 1)}{2}}$, e in egual modo ritrovasi $L^{i-(l-1)} M^{l-2}$

$$= L^{h-(g-1)} M^{g-2} \times L^{\frac{k(k \pm 3)}{2}} M^{-\frac{k(k \pm 1)}{2}},$$

$$L^{i-(l-2)} M^{l-4} = L^{h-(g-2)} M^{g-4} \times L^{\frac{k(k \pm 3)}{2}} M^{-\frac{k(k \pm 1)}{2}}$$

ec. ec.

Dunque chiamato Θ ciò, che diviene Π (N.° 456), ponendo i, l corrispondentemente in vece della h, g, sarà $\Theta = \Pi L^{\frac{k(k \pm 3)}{2}} M^{-\frac{k(k \pm 1)}{2}}$. Ora scrivendo i termini di $\Pi 1$ (N.° 457) giusta la formola (*II*) Tavola A, deve ciascuno di essi venir moltiplicato per $1 . 2 . 3 \ldots h$, e così ciascun termine di $\Theta 1$ (N.° 461) deve moltiplicarsi per $1 . 2 . 3 \ldots . i = 1 . 2 . 3 \ldots (h \pm k)$. Dunque se nelle quantità $\Pi 1$, $\Theta 1$ trascureremo i divisori numerici, vedesi, che sarà

$$\Pi 1 = 1 . 2 . 3 \ldots h \Pi, \quad \Theta 1 = 1 . 2 . 3 \ldots (h \pm k) \Theta,$$

e però $\Theta 1 = 1 . 2 . 3 \ldots (h \pm k) \Pi L^{\frac{k(k \pm 3)}{2}} M^{-\frac{k(k \pm 1)}{2}}$

463. Attribuiscansi nella presente ipotesi alla k i successivi valori 1, 2, 3, 4, ec., chiamando $F^{(q')} \Theta 1'$, $F^{(q'')} \Theta 1''$, $F^{(q''')} \Theta 1'''$, $F^{(q^{\text{IV}})} \Theta 1^{\text{IV}}$, ec. i risultati rispettivi di $F^{(q)} \Theta 1$, otterremo

(*XII*) $F^{(p)} \Pi 1 + F^{(q')} \Theta 1' + F^{(q'')} \Theta 1'' + F^{(q''')} \Theta 1''' +$ $F^{(q^{\text{IV}})} \Theta 1^{\text{IV}} +$ ec. $= \Pi \big(1 . 2 . 3 \ldots . h F^{(p)} +$

1 . 2 . 3

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b \pm 1)\, F^{(q')}\, L^{\frac{(1 \pm 3)}{2}}\, M^{-\frac{(1 \pm 1)}{2}} +$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b \pm 2)\, F^{(q'')}\, L^{\frac{2(2 \pm 3)}{2}}\, M^{-\frac{2(2 \pm 1)}{2}} +$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b \pm 3)\, F^{(q''')}\, L^{\frac{3(3 \pm 3)}{2}}\, M^{-\frac{3(3 \pm 1)}{2}} +$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b \pm 4)\, L^{\frac{4(4 \pm 3)}{2}}\, M^{-\frac{4(4 \pm 1)}{2}} + \text{ec.} \Big),$$

e scrivendo più esattamente, e più distesamente col tener separati i doppj valori della i, e però della l, e della q, col porre F' in luogo di $F^{(p)}$, e col chiamare F'', $F\,1$ i due valori del coefficiente $F^{(q')}$ corrispondenti ai due della i, chiamando F''', $F\,2$ i due della $F^{(q'')}$; F^{IV}, $F\,3$ i due della $F^{(q''')}$, e così di seguito, avremo il primo membro della (*XII*) uguale alla Formola (*VII*) Tavola A moltiplicata in tutte le sue parti per la quantità (*XIII*) Tavola A.

464. Eseguite le moltiplicazioni ora accennate, conservinsi nel risultato (*XII*) i termini solamente di esponente non negativo (1.° N.° 452), e si aggiungano giusta la Formola (*II*) i dovuti divisori numerici, che abbiamo finor trascurati (N.° 462). Dopo simili operazioni chiamato Ψ un tal risultato, non è difficile a vedersi, che $\Psi\, x^{b\alpha + p - g}$ esprime il complesso di tutti i termini, i quali, contenendo una medesima potenza $x^{b\alpha + p - g}$, risultano dall' elevarsi la quantità (*I*) a tutte le successive potenze b, $b+1$, $b-1$, $b+2$, $b-2$, ec. $b+k$, $b-k$, e dal moltiplicarsi tali potenze corrispondentemente per le quantità $F'\, x^{p}$, $F''\, x^{r'}$, $F\,1\, x^{r'}$, $F'''\, x^{r''}$, $F\,2\, x^{r''}$, $F^{\text{IV}}\, x^{r'''}$,

$F\,3\,x^{s'''}$, ec., $F^{(k+1)}\,x^{r^{(k)}}$, $F\,(k)\,x^{s^{(k)}}$, essendo pel precedente valor della q (N.° 462) $r' = p - (\alpha+1)$, $s' = p + \alpha$, $r'' = p - (2\alpha + 3)$, $s'' = p + (2\alpha - 1)$, $r''' = p - (3\alpha + 6)$, $s''' = p + (3\alpha - 3)$, ec. $r^{(k)} = p - \left(k\alpha + \frac{k(k+1)}{2}\right)$, $s^{(k)} = p + k\alpha - \frac{k(k-1)}{2}$.

465. Facciamo successivamente $g = 0, 1, 2, 3, 4$, ec., e chiamiamo Ψ', Ψ'', Ψ''', Ψ^{iv}, ec. i risultati corrispondenti della Ψ. Rappresentata per Φ la quantità espressa in (*XIII*) Tavola A, se eseguisco il prodotto $\Pi\,\Phi$, e aggiunti in esso i dovuti divisori numerici, se ritengo i termini solamente di esponente non negativo, pei (N.ⁱ 463, 464) mi risulta in generale $\Psi = \Pi\,\Phi$. Dunque facendo simili operazioni risulterà ancora $\Psi' = \Pi'\,\Phi$, $\Psi'' = \Pi''\,\Phi$, $\Psi''' = \Pi'''\,\Phi$, $\Psi^{iv} = \Pi^{iv}\,\Phi$, ec., e quindi pel (N.° 456) avremo

$$\Psi' = L^b \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots b}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots b} F' + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b-1)} F\,1\,L^{-1} \right)$$
$$= F'\,L^b + F\,1\,L^{b-1},$$

$$\Psi'' = L^{b-1} M \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots b}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b-1} F' + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b-2)} \right.$$
$$F\,1\,L^{-1} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b+1)} F''\,L^2\,M^{-1} +$$
$$\left. \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (b-2)} F\,2\,L^{-1}\,M^{-1} \right) =$$
$$\left(b\,F'\,L^{b-1} + (b-1)\,F\,1\,L^{b-2} \right) M +$$
$$\left(F''\,L^{b+1} + F\,2\,L^{b-2} \right),$$

$$\Psi''' = L^{b-2} M^2 \Big(\frac{b(b-1)}{1 \cdot 2} F' + \frac{(b-1)(b-2)}{1 \cdot 2} F_1 L^{-1}$$
$$+ (b+1) F'' L^2 M^{-1} + (b-2) F_2 L^{-1} M^{-1} \Big) +$$
$$L^{b-1} N \big(b F' + (b-1) F_1 L^{-1} \big) =$$
$$\Big(\frac{b(b-1)}{1 \cdot 2} F' L^{b-2} + \frac{(b-1)(b-2)}{1 \cdot 2} F_1 L^{b-3} \Big)$$
$$M^2 + \big((b+1) F'' L^b + (b-2) F_2 L^{b-3} \big)$$
$$M + \big(b F' L^{b-1} + (b-1) F_1 L^{b-2} \big) N,$$

$$\Psi^{IV} = L^{b-3} M^3 \Big(\frac{b(b-1)(b-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} F' +$$
$$\frac{(b-1)(b-2)(b-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} F_1 L^{-1} + \frac{(b+1)b}{1 \cdot 2}$$
$$F'' L^2 M^{-1} + \frac{(b-2)(b-3)}{1 \cdot 2} F^2 L^{-1} M^{-1} +$$
$$F''' L^5 M^{-3} + F_3 M^{-3} \Big) + L^{b-2} M N$$
$$\big(b(b-1) F' + (b-1)(b-2) F_1 L^{-1} +$$
$$(b+1) F'' L^2 M^{-1} + (b-2) F^2 L^{-1} M^{-1} \big) +$$
$$L^{b-1} \big(P b F' + (b-1) F_1 L^{-1} \big) =$$
$$\Big(\frac{b(b-1)(b-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} F' L^{b-3} + \frac{(b-1)(b-2)(b-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$F_1 L^{b-4} \Big) M^3 + \Big(\frac{(b+1)b}{1 \cdot 2} F'' L^{b-1} +$$
$$\frac{(b-2)(b-3)}{1 \cdot 2} F_2 L^{b-4} \Big) M^2 +$$
$$\text{(XIV)} \quad \big(b(b-1) F' L^{b-2} + (b-1)(b-2) F_1 L^{b-3} \big)$$
$$M N + \big((b+1) F'' L^b + (b-2) F^2 L^{b-3} \big) N +$$
$$\big(b F' L^{b-1} + (b-1) F_1 L^{b-2} \big) P +$$
$$\big(F''' L^{b+2} + F_3 L^{b-3} \big), \qquad \Psi^{V} —$$

$$\Psi^{V} = \Big(\frac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} F' L^{b-4} + \frac{(b-1)(b-2)(b-3)(b-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} F_1 L^{b-5} \Big) M^4 +$$

$$\text{(XIV)} \quad \Big(\frac{(b+1)b(b-1)}{1\cdot 2\cdot 3} F'' L^{b-2} + \frac{(b-2)(b-3)(b-4)}{1\cdot 2\cdot 3} F_2 L^{b-5} \Big) M^3 + \Big(\frac{b(b-1)(b-2)}{1\cdot 2} F' L^{b-3} +$$

$$\frac{(b-1)(b-2)(b-3)}{1\cdot 2} F_1 L^{b-4} \Big) M^2 N +$$

$$\Big((b+1) b F'' L^{b-1} + (b-2)(b-3) F_2 L^{b-4} \Big) MN + \Big(b(b-1) F' L^{b-2} + (b-1)(b-2) F_1 L^{b-3} \Big) MP + \Big((b+2) F''' L^{b+1} +$$

$$(b-3) F_3 L^{b-4} \Big) M + \Big(\frac{b(b-1)}{1\cdot 2} F' L^{b-2} + \frac{(b-1)(b-2)}{1\cdot 2} F_1 L^{b-3} \Big) N^2 +$$

$$\Big((b+1) F'' L^{b} + (b-2) F_2 L^{b-3} \Big) P + \Big(b F' L^{b-1} + (b-1) F_1 L^{b-2} \Big) Q,$$

$$\Psi^{VI} = \Big(\frac{b(b-1)\ldots(b-4)}{1\cdot 2\ldots 5} F' L^{b-5} + \frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-5)}{1\cdot 2\ldots 5} F_1 L^{b-6} \Big) M^5 +$$

$$\Big(\frac{(b+1)b\ldots(b-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} F'' L^{b-3} + \frac{(b-2)(b-3)\ldots(b-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} F_2 L^{b-6} \Big) M^4 +$$

$$\Big(\frac{b(b-1)\ldots(b-3)}{1\cdot 2\cdot 3} F' L^{b-4} +$$

$$\frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-4)}{1\,.\,2\,.\,3}F1\,L^{b-5})\,M^3N+$$

$$(\frac{(b+1)\,b\,(b-1)}{1\,.\,2}F''\,L^{b-2}+$$

$$\frac{(b-2)(b-3)(b-4)}{1\,.\,2}F2\,L^{b-5})\,M^2\,N+$$

$$(\frac{b\,(b-1)(b-2)}{1\,.\,2}F'\,L^{b-3}+$$

$$\frac{(b-1)(b-2)(b-3)}{1\,.\,2}F1\,L^{b-4})\,M^2\,P+$$

$$(\frac{(b+2)(b+1)}{1\,.\,2}F'''\,L^{b}+\frac{(b-3)(b-4)}{1\,.\,2}$$

$$F3\,L^{b-5})\,M^2+(\frac{b\,(b-1)(b-2)}{1\,.\,2}F'\,L^{b-3}+$$

$$\frac{(b-1)(b-2)(b-3)}{1\,.\,2}F1\,L^{b-4})\,M\,N^2+$$

$$((b+1)\,b\,F''\,L^{b-1}+(b-2)(b-3)\,F2\,L^{b-4})$$

$$MP+(b\,(b-1)\,F'\,L^{b-2}+(b-1)(b-2)$$

$$F1\,L^{b-3})\,MQ+(\frac{(b+1)\,b}{1\,.\,2}F''\,L^{b-1}+$$

$$\frac{(b-2)(b-3)}{1\,.\,2}F2\,L^{b-4})\,N^2+$$

$$(b\,(b-1)\,F'\,L^{b-2}+(b-1)(b-2)\,F1\,L^{b-3})$$

$$NP+((b+2)\,F'''\,L^{b+1}+(b-3)\,F3\,L^{b-4})$$

$$N+((b+1)\,F''\,L^{b}+(b-2)\,F2\,L^{b-3})\,Q+$$

$$(b\,F'\,L^{b-1}+(b-1)\,F1\,L^{b-2})\,R,$$

$$\Psi^{\mathrm{VII}}=(\frac{b\,(b-1)\ldots(b-5)}{1\,.\,2\ldots6}F'\,L^{b-6}+$$

$$\frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-6)}{1\,.\,2\ldots6}F1\,L^{b-7})\,M^6+$$

$$(b+$$

$$\left(\frac{(b+1)b\ldots(b-3)}{1.2\ldots5}F''L^{b-4}+\right.$$

$$\left.\frac{(b-2)(b-3)\ldots(b-6)}{1.2\ldots.5}F_2L^{b-7}\right)M^5+$$

$$\left(\frac{b(b-1)\ldots(b-4)}{1.2.\,..4}F'L^{b-5}+\right.$$

$$\left.\frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-5)}{1.2\ldots.4}F_1L^{b-6}\right)M^4N+$$

$$\left(\frac{(b+1)b\ldots.(b-2)}{1.2\ldots.3}F''L^{b-3}+\right.$$

$$\left.\frac{(b-2)(b-3)\ldots(b-5)}{1.2.3}F_2L^{b-6}\right)M^3N+$$

$$\left(\frac{b(b-1)\ldots.(b-3)}{1.2.3}F'L^{b-4}+\right.$$

$$\left.\frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-4)}{1.2.3}F_1L^{b-5}\right)M^3P+$$

$$\left(\frac{(b+2)(b+1)b}{1.2.3}F'''L^{b-2}+\right.$$

$$\left.\frac{(b-3)(b-4)(b-5)}{1.2.3}F_3L^{b-6}\right)M^3+$$

$$\left(\frac{b(b-1)\ldots(b-3)}{1.2.1.2}F'L^{b-4}+\right.$$

$$\left.\frac{(b-1)(b-2)\ldots(b-4)}{1.2.1.2}F_1L^{b-5}\right)M^2N^2+$$

$$\left(\frac{(b+1)b(b-1)}{1.2}F''L^{b-2}+\right.$$

$$\left.\frac{(b-2)(b-3)(b-4)}{1.2}F_2L^{b-5}\right)M^2P+$$

$$\left(\frac{(b(b-1)(b-2)}{1.2}F'L^{b-3}+\right.$$

(b—

$$\frac{(b-1)(b-2)(b-3)}{1\,.\,2} F\,1\, L^{b-4})\, M^2 Q +$$

$$(\frac{(b+1)\,b\,(b-1)}{1\,.\,2} F'' L^{b-2} + \frac{(b-2)(b-3)(b-4)}{1\,.\,2}$$

$$F\,2\, L^{b-5})\, M N^2 + (b\,(b-1)(b-2)\, F' L^{b-3}$$

$$+ (b-1)(b-2)(b-3)\, F\,1\, L^{b-4})\, M N P +$$

$$((b+2)(b+1)\, F''' L^{b} + (b-3)(b-4\,(F\,3\, L^{b-5})$$

$$M N + ((b+1)\, b\, F'' L^{b-1} + (b-2)(b-3)\, F\,2\, L^{b-4})$$

$$M Q + (b\,(b-1)\, F' L^{b-2} + (b-1)(b-2)\, F\,1\, L^{b-3})$$

$$M R + (\frac{b\,(b-1)(b-2)}{1\,.\,2\,.\,3} F' L^{b-3} +$$

$$\frac{(b-1)(b-2)(b-3)}{1\,.\,2\,.\,3} F\,1\, L^{b-4})\, N^3 +$$

$$((b+1)\, b\, F'' L^{b-1} + (b-2)(b-3)\, F\,2\, L^{b-4})$$

$$N P + (b\,(b-1)\, F' L^{b-2} + (b-1)(b-2)\, F\,1\, L^{b-3})$$

$$N Q + (\frac{b\,(b-1)}{1\,.\,2} F' L^{b-2} + \frac{(b-1)(b-2)}{1\,.\,2} F\,1\, L^{b-3})$$

$$P^2 + ((b+2)\, F''' L^{b+1} + (b-3)\, F\,3\, L^{b-4})\, P +$$

$$((b+1)\, F'' L^{b} + (b-2)\, F\,2\, L^{b-3})\, R + (b\, F' L^{b-1}$$

$$+ (b-1)\, F\,1\, L^{b-2})\, S + (F^{IV} L^{b+3} + F\,4\, L^{b-4}),$$

ec. ec.

466. Considerando queste quantità (*XIV*), e la (*XIII*) Tav. A veggio esistere in esse un andamento costante, per cui indipendentemente dalla Tavola potremo con facilità determinarle nell'

istesso modo successivo, come accennammo nel (N.° 458) determinarsi le quantità (IX) con questo di più solamente, che laddove in Ψ il numero degli apici sia $\frac{k(k+1)}{2}+1$, devesi a cagione della ($XIII$) Tav. A sull'ultimo del risultato aggiungere la quantità

$$(XV)\ L^{b-\frac{k(k+1)}{2}}\left(F^{(k+1)}L^{\frac{k(k+3)}{2}}+F(k+1)\,L^{\frac{(k+1)(k-2)}{2}}\right)$$

$=F\,L^{(k+1)b+k}+F(k+1)\,L^{b-(k+1)}$. Perciò non tutte le ($XIV$) vengono a contenere una quantità corrispondente alla (XV), ma quelle la conterranno solamente, che ricavansi dalla $\Psi\left(\frac{k(k+1)}{2}+1\right)$ con la successiva supposizione di $k=0, 1, 2, 3, 4$, ec. onde la conterranno le Ψ', Ψ'', Ψ^{iv}, Ψ^{vii}, Ψ^{xi} ec., e non le altre.

Ottenuta pertanto dalla (XV) con la supposizione di $k=0$ la prima quantità Ψ', moltiplico amendue i termini di questa per $L^{-1}M$, e per gli esponenti rispettivi della L in essi contenuta, aggiungo al prodotto la quantità $F''L^{(b+1)}+F\,2\,L^{b-2}$ ricavata dalla (XV) facendo $k=1$, e mi verrà la Ψ''. In seguito moltiplico ciascun termine dalla Ψ'' per $L^{-1}M$, e per l'esponente in esso della L, moltiplico i due termini della Ψ' per $L^{-1}N$, e per i rispettivi esponenti della L, divido i termini, che mi derivano per gli esponenti delle M, N risultati, e ne verrà la quantità Ψ'''. In generale ricaveremo la $\Psi^{(m)}$ moltiplitiplicando primieramente tutta la $\Psi^{(m-1)}$ per $L^{-1}M$, tutta la $\Psi^{(m-2)}\frac{M}{}$ (per i N.[1] 458, 8) per $L^{-1}N$, tutta la $\Psi^{(m-3)}\frac{MN}{}$ per $L^{-1}P$, la $\Psi^{(m-4)}\frac{MNP}{}$ per $L^{-1}P$ ec.; poscia moltiplicando ciascun termine, che risulta per l' esponente della L nel termine, da cui deriva; e dividendo esso per gli esponenti della M, N, P, ec. nel medesimo contenuti; e finalmente, se m sia uno dei numeri 1, 2, 4, 7, 11, ec. $\frac{k(k+1)}{2}+1$, aggiungendo al risultato la quantità, che corrispondentemente proviene dalla (*XV*).

467. Se sia data l' Equazione

$$\begin{aligned}
&+F''x^{p-(\alpha+1)}y^{b+1}+F'''x^{p-(2\alpha+3)}y^{b+2}\\
&+F^{iv}x^{p-(3\alpha+6)}y^{b+3}+\ldots\ldots\\
(XVI)\ 0=F'x^py^b\quad &+F^{k+1}x^{p-(k\alpha+\frac{k(k+1)}{2})}y^{b+k}\\
&+F1\,x^{p+\alpha}y^{b-1}+F2\,x^{p+(2\alpha-1)}y^{b-2}\\
&+F3\,x^{p+(3\alpha-3)}y^{b-3}+\ldots\ldots\\
&+F(k)\,x^{p+(k\alpha-\frac{k(k-1)}{2})}y^{b-k},
\end{aligned}$$

e se in essa in luogo della y sostituiscasi la quantità $Lx^{\alpha}+Mx^{\alpha-1}+Nx^{\alpha-2}+Px^{\alpha-3}+$ ec., è facile a vedersi da quanto si è detto fin quì, che ne verrà il risultato

$$(XVII)\ \Psi'x^{b\alpha}+\Psi''x^{b\alpha-1}+\Psi'''x^{b\alpha-2}+\Psi^{iv}x^{b\alpha-3}+\text{ec.}=0.$$

mmm 2 Se

Se avendosi $b = 2$, l' Equazione data sia la

$$0 = F' x^{p} y^{2} + F'' x^{p-(\alpha+1)} y^{3} + F1\, x^{(p+\alpha)} y + F2\, x^{p+(2\alpha-1)},$$

le quantità (XIV) diventeranno

$$\Psi' = F' L^{2} + F1\, L,$$
$$\Psi'' = (2F'L + 1)M + (F'' L^{3} + F2),$$
$$\Psi''' = F' M^{2} + 3F' L^{2} M + (2F'L + F1)N$$
$$\Psi^{IV} = 3F'' L M^{2} + 2F' M N + 3F'' L^{2} N + (2F'L + F1)P$$
$$\Psi^{V} = F'' M^{3} + 6F'' L M N + 2F' M P + F' N^{2} + 3F'' L^{2} P + (2F'L + F1)Q$$
$$\Psi^{VI} = 3F'' M^{2} N + 6F'' L M P + 2F' M Q + 3F'' L N^{2} + 2F' N P + 3F'' L^{2} Q + (2FL + F1)R$$

ec. ec. ec.

468. Ritrovare per serie il valore delle radici di un' Equazione determinata, che pel (N.° 306) supporrò già libera dalle radici uguali

(XVIII) $A y^{m} + B y^{m-1} + C y^{m-2} + \ldots . F y^{m-(n-2)} + G y^{m-(n-1)} + H y^{m-n} + I y^{m-(n+1)} + K y^{m-(n+2)} + \ldots . + V = 0.$

Chiamo perciò x uno qualunque dei suoi coefficienti, per esempio il secondo, e la riduco così alla

(XIX) $A y^{m} + x y^{m-1} + C y^{m-2} + \text{ec.} = 0.$ Ciò fatto, essendo quest' ultima un' Equazione indeterminata, la risolvo secondo il metodo del (Capo prececedente), pongo nelle serie, che risultano, B in luogo della x, e da esse si avranno per serie le radici della (*XVIII*).

Ponghiamo giusta il (N.° 400) nella (*XIX*) $y = L\,x^{\alpha}$; nella ipotesi di $x = \infty$ risulteranno per α i due valori $\alpha' = 1$, $\alpha'' = -\frac{1}{m-1}$, e avremo in corrispondenza per L le due Equazioni $L + 1 = 0$, $L^{m-1} + V = 0$. Dalla seconda di queste, allorchè $m - 1$ è dispari, vedesi che per L si ricava un valore reale, e glialtri tutti immaginari; e quando $m - 1$ è pari, per la stessa L di valori reali non se ne ritraggono che due soli, o nessuno; ma nella nostra ipotesi ciò deve sempre succedere necessariamente. Dunque od un numero $m - 2$, od un numero $m - 3$, o tutte le serie, che troveremo, saranno involte di quantità immaginarie, quantunque i valori corrispondenti della y possano essere reali.

Sostituiscasi nella (*XVIII*) la x in luogo non della B, ma della C, ne verrà la $A\,y^{m} + B\,y^{m-1} + x\,y^{m-2} +$ ec. $+ V = 0$, e supposto $y = L\,x^{\alpha}$, $x = \infty$ troveremo per α i due valori $\alpha' = \frac{1}{2}$, $\alpha'' = -\frac{1}{m-2}$, e per L le due Equazioni $L^{2} + 1 = 0$, $L^{m-2} + V = 0$. Poichè quì pure i valori della L sono o tutti, od in numero di $m - 1$, o di $m - 2$, o di $m - 4$ immaginari, verremo all' inconveniente medesimo dell' altro caso. Lo stesso si dice, se pongasi la x in luogo del coefficiente D, o dell'

al-

altro E, ec., giacchè per L risultano in corrispondenza le Equazioni $L^3 + 1 = 0$, $L^{m-3} + V = 0$, oppure $L^4 + 1 = 0$, $L^{m-4} + V = 0$, ec.

469. Dunque la soluzione, che abbiamo accennata, del nostro Problema (N.° 468) è molto inopportuna. Di più le Equazioni in L possono esser tali, che noi non sappiamo risolvere, e in tal caso il nostro metodo di soluzione è impraticabile. Dunque converrà abbandonarlo, e ricorrendo ad altro migliore, ponghiamo la x nella (*XVIII*) in modo, che gli m valori della L vengano a dipendere da m Equazioni tutte del primo grado.

Suppongasi perciò la (*XVIII*) ridotta alla

(XX) $a y^m + b x^\beta y^{m-1} + c x^\gamma y^{m-2} + d x^\delta y^{m-3} + e x^\varepsilon y^{m-4} + f x^\zeta y^{m-5} + \dots + n x^\omega = 0$, e suppongasi in questa $x = \infty$, $y = L x^\alpha$: avremo la serie di esponenti

(XXI) $m\alpha$, $(m-1)\alpha + \beta$, $(m-2)\alpha + \gamma$, $(m-3)\alpha + \delta$, $(m-4)\alpha + \varepsilon$, $(m-5)\alpha + \zeta$, ec., ω: Affinchè i valori della L contengansi in m Equazioni tutte del primo grado, anche la α dovrà in corrispondenza avere m valori diversi, e questi dovranno evidentemente esser tali, che col loro mezzo gli esponenti (*XXI*) debbono risultare tra loro successivamente uguali soltanto a due a due, e maggiori degli altri, quindi pel primo valore della α il primo esponente deve diventare uguale al secondo, e maggiore dei susseguenti, in seguito l' esponente secondo per un nuovo valore della α de-

deve risultare uguale al terzo, e più grande degli altri, e così in progresso. Ora paragonando giusta il (N.° 393) il primo dei (*XXI*) esponenti con quei, che seguono, abbiamo per α i valori

(*XXII*) $\beta, \frac{\gamma}{2}, \frac{\delta}{3}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\zeta}{5}$, ec. $\frac{\omega}{m}$; Paragonando pel (N.° 396) il secondo esponente con gli ulteriori, ànnosi i risultati

(*XXIII*) $\gamma - \beta, \frac{\delta - \beta}{2}, \frac{\varepsilon - \beta}{3}, \frac{\zeta - \beta}{4}$, ec. $\frac{\omega - \beta}{m - 1}$; Dal paragone dell' esponente terzo si ottengono i valori

(*XXIV*) $\delta - \gamma, \frac{\varepsilon - \gamma}{2}, \frac{\zeta - \gamma}{3}$, ec. $\frac{\omega - \gamma}{m - 2}$; Dal paragone del quarto derivano le quantità

(*XXV*) $\varepsilon - \delta, \frac{\zeta - \delta}{2}$, ec. $\frac{\omega - \delta}{m - 3}$, ec.. Dunque, acciocchè succeda rapporto ai valori della α quanto è stato ora accennato, converrà che in ciascuna delle serie (*XXII*), (*XXIII*), (*XXIV*), (*XXV*), ec. il primo valore sia maggiore dei susseguenti, e però che si abbia dalla (*XXII*) $\gamma < 2\beta$, $\delta < 3\beta$, $\varepsilon < 4\beta$, $\zeta < 5\beta$, ec. $\omega < m\beta$, dalla (*XXIII*) $\delta - \beta < 2(\gamma - \beta)$, $\varepsilon - \beta < 3(\gamma - \beta)$, $\zeta - \beta < 4(\gamma - \beta)$, ec., $\omega - \beta < (m - 1)(\gamma - \beta)$, dalla (*XXIV*) $\varepsilon - \gamma < 2(\delta - \gamma)$, $\zeta - \gamma < 3(\delta - \gamma)$, ec., $\omega - \gamma < (m - 2)(\delta - \gamma)$, e così di seguito.

Pertanto sarà necessario attribuire alla γ un valore $< 2\beta$, alla δ un valore 3β, ed insieme

$< 2\gamma - \beta$, alla ε un valore minore di ciascuna delle tre quantità 4β, $3\gamma - 2\beta$, $2\delta - \gamma$, alla ζ un valor minore delle quattro 5β, $4\gamma - 3\beta$, $3\delta - 2\gamma$, $2\varepsilon - \beta$, ec.; ma se sia $\gamma < 2\beta$, $\delta < 2\gamma - \beta$, $\varepsilon < 2\delta - \gamma$, $\zeta < 2\varepsilon - \delta$, ec., è facile a vedersi, che queste quantità γ, δ, ε, ζ, ec. risultano corrispondentemente minori ancora delle altre quantità sovraccennate. Dunque pel nostro intento dato alla β un valore qualunque, basterà determinare le γ, δ, ε, ζ, ec. in modo che $\gamma < 2\beta$, $\delta < 2\gamma - \beta$, $\varepsilon < 2\delta - \gamma$, $\zeta < 2\varepsilon - \delta$, ec.

470. Valendosi questi esponenti tutti i numeri interi, il massimo valore, che possa attribuirsi alla γ sarà $2\beta - 1$, il massimo da attribuirsi alla δ sarà $2\gamma - \beta - 1$, il massimo da darsi alla ε sarà $2\delta - \gamma - 1$, e così in progresso. Dunque supponendo $\gamma = 2\beta - 1$, $\delta = 2\gamma - \beta - 1$, $\varepsilon = 2\delta - \gamma - 1$, $\zeta = 2\varepsilon - \delta - 1$, ec., avremo con la sostituzione la serie β, $\gamma = 2\beta - 1$, $\delta = 3\beta - 3$, $\varepsilon = 4\beta - 6$, $\zeta = 5\beta - 10$, ec. Ora i numeri, che in questa si sottraggono, formano una serie a differenze seconde costanti, di cui il termine generale è $\frac{n^2 - n}{2}$. Dunque uno qualunque di questi esponenti verrà espresso da $n\beta - \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(2\beta - n + 1)}{2}$.

471. In conseguenza dei valori ora determinati delle β, γ, δ, ε, ζ, ec. la (XX) diverrà

$$a y^m + b x^\beta y^{m-1} + c x^{2\beta-1} y^{m-2} + d x^{3\beta-3} y^{m-3}$$
$$+ e x^{4\beta-6} y^{m-4} + f x^{5\beta-10} y^{m-5} + \ldots +$$
$$(XXVI)\quad q x^{\frac{(n-3)(2\beta-n+4)}{2}} y^{m-(n-3)} +$$
$$r x^{\frac{(n-2)(2\beta-n+3)}{2}} y^{m-(n-2)} +$$
$$s x^{\frac{(n-1)(2\beta-n+2)}{2}} y^{m-(n-1)} +$$
$$t x^{\frac{n(2\beta-n+1)}{2}} y^{m-n} +$$
$$u x^{\frac{(n+1)(2\beta-n)}{2}} y^{m-(n+1)} +$$
$$v x^{\frac{(n+2)(2\beta-n-1)}{2}} y^{m-(n+2)} +$$
$$z x^{\frac{(n+3)(2\beta-n-2)}{2}} y^{m-(n+3)} + \ldots = 0$$

e gli esponenti (XXI) diventando

$$m\alpha,\ (m-1)\alpha+\beta,\ (m-2)\alpha+(2\beta-1),$$
$$(XXVII)\quad (m-3)\alpha+(3\beta-3),\ (m-4)\alpha+(4\beta-6),$$
$$(m-5)\alpha+(5\beta-10) \text{ ec.}$$
$$\left(m-(n-1)\right)\alpha + \frac{(n-1)(2\beta-n+2)}{2},$$
$$(m-n)\alpha + \frac{n(2\beta-n+1)}{2},$$
$$\left(m-(n+1)\right)\alpha + \frac{(n+1)(2\beta-n)}{2}, \text{ ec.}$$

la α acquisterà i valori $\alpha'=\beta$, $\alpha''=\beta-1$, $\alpha'''=\beta-2$ ec. $\alpha^{(n)}=\beta-(n-1)$, $\alpha^{(n+1)}=\beta-n$, ec.

472. Supponghiamo $\alpha=\alpha^{(n+1)}=\beta-n$, e

 sosti-

sostituiscasi questo valore negli esponenti (*XXVII*) ; essi diverranno

$$m\beta - mn\,,\ m\beta - (m-1)n\,,\ m\beta - ((m-2)n+1),$$

(XXVIII) $$m\beta - ((m-3)n+3),\ m\beta - ((m-4)n+6)\,,\ \text{ec.}$$

$$m\beta - \left((m-(n-1))n + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right),$$

$$m\beta - \left((m-n)n + \frac{n(-1)}{2}\right),$$

$$m\beta - \left((m-(n+1))n + \frac{(n+1)n}{2}\right)$$, e ciascuno di questi vedesi, che verrà espresso dalla formola

(XXIX) $$m\beta - \left((m-g)n + \frac{g(g-1)}{2}\right)$$, dalla quale nascerà l' esponente primo, allorchè $g=0$, il secondo, quando $g=1$; il terzo, mentre $g=2$, ec.

Ridotta la formola (*XXIX*) alla $m(\beta-n)+\frac{g(2n+1-g)}{2}$, e trascurata per ora la parte $m(\beta-n)$ diamo successivamente alla g prima i valori n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, ec. $n-r$, poi gli altri $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, ec. $n+s$. Per la sostituzione dei valori primi avremo dalla $\frac{g(2n+1-g)}{2}$ i risultati esposti in (*XXX*) nella prima colonna verticale, dalla sostituzione dei secondi avremo gli esposti nella colonna seconda. Ora ogni due risultati di ciascuna linea sono uguali fra loro, e di più vanno essi via via decrescendo, quanto più dali' dall' alto discendesi al basso, cosicchè i due primi sono maggiori di tutti, i secondi son minori dei primi, e maggiori di quei, che seguono, i terzi più piccoli di quei, che li precedono, e maggiori dei susseguenti, e così in progresso. Dunque aggiungendo a ciascuno dei risultati (*XXX*) la quantità $m(\beta - n)$ ne viene, che gli esponenti *nesimo*, ed $n+1$ *esimo*, gli altri $n-1$ *esimo* ed $n+2$ *esimo*, i terzi $n-2$ *esimo*, ed $n+3$ *esimo*, ec. saran tali, che uguagliandosi tutti fra loro corrispondentemente a due a due, i primi due saranno i massimi, i secondi due quelli, che ai primi maggiormente si accostano, i terzi quelli, che immediatamente succedano ai secondi, e così di seguito

(*XXX*)

$$g = n, \quad \frac{n^2+n}{2}, \qquad g = n+1, \quad \frac{n^2+n}{2}$$

$$g = n-1, \quad \frac{n^2+n-2}{2}, \qquad g = n+2, \quad \frac{n^2+n-2}{2}$$

$$g = n-2, \quad \frac{n^2+n-6}{2}, \qquad g = n+3, \quad \frac{n^2+n-6}{2}$$

$$g = n-3, \quad \frac{n^2+n-12}{2}, \qquad g = n+4, \quad \frac{n^2+n-12}{2}$$

ec. ec. ec. ec.

$$g = n-r, \quad \frac{n^2+n-r(r+1)}{2}$$

$$g = n+s, \quad \frac{n^2+n-s(s-1)}{2}.$$

474. Avvertasi, che supposto $r+s=m$, se

 $r=n$,

$r = n$, $s = r + 4$, e però m numero dispari, ed $n = \frac{m-1}{2}$, allora esisteranno in ciascuna colonna $\frac{m+1}{2}$ termini, e però fra gli esponenti (*XXVIII*) i primi $\frac{m+1}{2}$ uguaglieranno rispettivamente i secondi $\frac{m+1}{2}$. Che se restando $r + s = m$, i numeri n, r, s ànno valori diversi dagli accennati, allora l' una delle colonne sarà più lunga dell' altra, e i termini, che nella colonna più lunga sopravvanzano, e però gli esponenti corrispondenti non avranno nell' altra colonna termini, od esponenti rispettivamente eguali. Ancor essi però anderanno vieppiù decrescendo, quanto più la colonna discende.

475. Vogliansi gli esponenti della serie $y = L\,x^{\alpha} +$ ec. (N.° 413) essendo x, y le variabili della (*XXVI*), ed essendo $\alpha = \alpha^{(n+1)} = \beta - n$ (N.° 472).

Poichè nella ipotesi di $\alpha = \beta - n$ abbiamo gli esponenti (*XXVIII*), i quali procedano nella loro grandezza giusta l' ordine delle quantità (*XXX*), ne segue pei (N.^{i} 407, 414), che sarà

$$\pi' = m(\beta - n) + \frac{n^2 + n}{2},\ \pi'' = m(\beta - n) + \frac{n^2 + n - 2}{2},$$

$$\pi''' = m(\beta - n) + \frac{n^2 + n - 6}{2},$$

$$\pi^{IV} = m(\beta - n) + \frac{n^2 + n - 12}{2},\ \text{ec.}$$

$\pi^{(v+1)}$

$\pi^{(r+1)} = m(\beta - n) + \frac{n^2 + n - r(r+1)}{2}$. Ora sottraendo giusta il (N.° 425) dalla π' le quantità π'', π''', π^{IV}, ec. $\pi^{(r+1)}$, ci risulta $\pi' - \pi'' = 1$, $\pi' - \pi''' = 3$, $\pi' - \pi^{IV} = 6$ ec. $\pi' - \pi^{(r+1)} = \frac{r(r+1)}{2}$. Dunque eseguita l' operazione citata del (N.° 425), troveremo, che la serie degli esponenti richiesta sarà la seguente α, $\alpha - 1$, $\alpha - 2$, $\alpha - 3$, ec., onde essendo $\alpha = \beta - n$, la

XXXI) $y = L\,x^{\alpha} + M\,x^{\alpha - 1} + N\,x^{\alpha - 2} + P\,x^{\alpha - 3} +$ ec.
ci esprimerà una qualunque delle radici della (*XXVI*).

476. Volendo ora conoscere il valore delle quantità L, M, N, ec., non avremo che a servirci del metodo dei coefficienti indeterminati (N.° 425); ma perchè troppo lungo sarebbe il sostituire la quantità $L\,x^{\alpha}$ + ec. in luogo della y, come nel (N.° 416), noi ci serviremo piuttosto del metodo esposto al (N.° 466) nel modo seguente.

Prendo nella Equazione (*XXVI*) il termine $t\,x^{\frac{n(2\beta - n + 1)}{2}}\,y^{m-n}$ corrispondente alla ipotesi di $\alpha = \alpha^{(n+1)} = \beta - n$ (N.° 472). Suppongo in esso l' esponente della y; cioè $m - n = h$, e suppongo $\frac{n(2\beta - n + 1)}{2} = p$; risultando perciò $\frac{(n-k)(2\beta - n + k + 1)}{2} = p - \left(k\alpha + \frac{k(k+1)}{2}\right)$, ed

(*n*

$\frac{(n+k)(2\beta-n-k+1)}{2} = p + \left(k\alpha - \frac{k(k-1)}{2}\right)$, avremo gli esponenti $\frac{(n-1)(2\beta-n+2)}{2} = p - (\alpha+1)$, $\frac{(n-2)(2\beta-n+3)}{2} = p - (2\alpha+3)$, $\frac{(n-3)(2\beta-n+4)}{2} = p - (3\alpha+6)$, ec. e gli altri $\frac{(n+1)(2\beta-n)}{2} = p+\alpha$, $\frac{(n+2)(2\beta-n-1)}{2} = p + (2\alpha-1)$, $\frac{(n+3)(2\beta-n-2)}{2} = p + (3\alpha-3)$, ec.. Ciò essendo, scrivo la nostra Equazione, col porre a principio il termine $t\,x^p\,y^b$, poscia al dissopra in una linea orizzontale tutti i termini, che lo precedono, in un' altra al dissotto tutti quei, che succedono: essa con ciò acquista la forma

$$\begin{array}{ll} & + s\,x^{p-(\alpha+1)}\,y^{b+1} + r\,x^{p-(2\alpha+3)}\,y^{b+2} \\ & + q\,x^{p-(3\alpha+6)}\,y^{b+3} + \dots\dots \\ & + f\,x^{p-\left(k\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\right)}\,y^{m+k} \\ \text{(XXXII)}\; 0 = t\,x^p\,y^b & + u\,x^{p+\alpha}\,y^{b-1} + v\,x^{p+(2\alpha-1)}\,y^{b-2} \\ & + z\,x^{p+(3\alpha-3)}\,y^{b-3} + \dots\dots \\ & + \Psi\,x^{p+\left(k\alpha-\frac{k(k-1)}{2}\right)}\,y^{m-k}. \end{array}$$

Dunque, supposto $t = F'$, $s = F''$, $r = F'''$, ec., $u = F1$, $v = F2$, $z = F3$, ec., diverrà essa identica con la (*XVI*). Ora dalla (*XVI*) per la sostituzione di $L\,x^\alpha + M\,x^{\alpha-1} +$ ec. in luogo della y

la y si ottiene la (*XVII*) (N.° 467); dunque l' Equazione medesima si otterrà per la medesima sostituzione dalla (*XXXII*). Ma per la determinazione dei coefficienti L, M, N, ec. col metodo dei coefficienti indeterminati, ritrovate le quantità Ψ', Ψ'', Ψ''', ec., non abbiamo che ad uguagliare ciascuna di queste allo zero. Dunque pel nostro intento non avrò che a cercare giusta il (N.° 466) le accennate Ψ', Ψ'', Ψ''', ec., poscia a supporre $\Psi' = 0$, $\Psi'' = 0$, $\Psi''' = 0$, ec.; e dalla soluzione di queste Equazioni ci risulterà il valor domandato dei coefficienti L, M, N, ec.

477. Ciò di fatti eseguito, poichè ci risulta

(*XXXIII*) $$L = -\frac{F\,1}{F'},\quad M = \frac{F\,2\,F'^3 - F\,1^3\,F''}{F\,1\,F'^3},$$

$$N = \frac{(2\,F\,1^3 F'' + F\,2\,F'^3)(F\,2\,F'^3 + F\,1^3\,F'')}{F'^5\,F\,1^3}$$, ec., il valore della y nella (*XXXII*), ossia nella (*XXVI*) sarà in generale

(*XXXIV*) $$y = -\frac{F\,1}{F'}\,x^{\beta-n} + \frac{F\,2\,F'^3 - F\,1^3\,F''}{F\,1\,F'^3}\,x^{\beta-n-1} + \frac{(2\,F\,1^3\,F'' + F\,2\,F'^3)(F\,2\,F'^3 - F\,1^3\,F'')}{F'^5\,F\,1^3}\,x^{\beta-n-2} + \text{ec.},$$

e supponendo quivi successivamente $n = 0, 1, 2, 3$, ec., $m - 1$, e sostituendo in luogo delle F', $F\,1$, F'', $F\,2$, ec. i rispettivi coefficienti, otterremo un numero m di serie esprimentici le m radici della (*XXVI*).

478. Ma noi vogliamo la soluzione della (*XVIII*) (N.° 468). Se la (*XX*), e però la

(*XXVI*)

(XXVI) è provenuta, come è stato supposto nel (N.° 469, 470), dalla (XVIII), converrà che i coefficienti di quella a, b, c, ec., i quali colà lasciammo indeterminati, dipendano dai coefficienti A, B, C, ec. di questa, e dalla x. Supponghiamo pertanto nella (XXVI) $a = A$, $b = \frac{B}{x^{\beta}}$,

$$c = \frac{C}{x^{2\beta-1}}, \text{ ec.}, \; r = \frac{F}{x^{\frac{(n-2)(2\beta-n+3)}{2}}},$$

$$s = \frac{G}{x^{\frac{(n-1)(2\beta-n+2)}{2}}}, \; t = \frac{H}{x^{\frac{n(2\beta-n+1)}{2}}},$$

$$u = \frac{I}{x^{\frac{(n+1)(2\beta-n)}{2}}}, \; v = \frac{K}{x^{\frac{(n+2)(2\beta-n-1)}{2}}}, \text{ ec.}$$

(N.ⁱ 469, 471): con questa ipotesi, qualunque siasi la x, le due (XVIII), (XXVI) sono identiche fra di loro. Dunque, se porremo le quantità

$$\frac{H}{x^{\frac{n(2\beta-n+1)}{2}}}, \; \frac{I}{x^{\frac{(n+1)(2\beta-n)}{2}}}, \; \frac{G}{x^{\frac{(n-1)(2\beta-n+2)}{2}}},$$

$$\frac{K}{x^{\frac{(n+2)(2\beta-n-1)}{2}}}, \text{ ec. nei valori (XXXIII) in}$$

luogo delle $F' = t$, $F1 = u$, $F'' = s$, $F2 = v$, ec. (N.° 476), i risultati, che ne vengono, collocati nella (XXXI) ci daranno il valor generale della y nella (XVIII); valore, da cui ritrarremo per serie tutte le radici di questa Equazione,

col

col supporre successivamente $n = 0, 1, 2, 3$, ec. $(m - 1)$ (N.° 477). Ora eseguendo le accennate sostituzioni, col porre per maggiore semplicità, come nel (N.° 476), $\frac{n(2\beta - n + 1)}{2} = p$, ec., ci risulta

$$L = -\frac{I}{H x^{\alpha}}, M = \frac{K H^3 - G I^3}{H^3 I x^{\alpha-1}},$$

$$N = \frac{(2 I^3 G + H^3 K(K H^3 - G I^3)}{H^5 I^3 x^{\alpha-2}},$$ ec., onde la (*XXXI*) diventa

XV) $$y = \frac{-I}{H} + \frac{K H^3 - G I^3}{H^3 I} + \frac{(2 G I^3 + H^3 K)(K H^3 - G I^3)}{H^5 I^3} + \text{ec.},$$

scomparendo la x da se medesima. Dunque qualunque valore si dia a questa x, sempre dalla (*XXXI*) si otterrà la medesima (*XXXV*); e per conseguenza a maggiore semplicità potremo pel nostro intento supporre, che la x abbia il valore 1, e però che $a = A$, $b = B$, $c = C$, ec.

479. Tutte le proprietà esposte finora, e questa ultima specialmente, per cui abbiamo alla x attribuito il valore 1, e l' altra del (N.° 466), per cui dipendentemente dalla sola formola
$F^{(k+1)} L^{b+k} + F(k+1) L^{b-(k+1)}$

corrispondente al termine $\Psi^{\left(\frac{k(k+1)}{2}+1\right)}$, possiamo trovare tutte le quantità (*XIV*), ci serviranno non difficilmente alla immediata soluzione per serie della (*XVIII*), senza ricorrere alla soluzione della (*XXVI*); come vedremo nella operazione seguente, operazione, che applicherò in primo luogo alle Equazioni particolari

(*XXXVI*) $Ay^2 + By + C = 0$,

(*XXXVII*) $Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$,

per poi passare alla generale (*XVIII*), e operazione, di cui ognuno potrà agevolmente dedur la ragione da quanto finora si è detto.

480. Prendendo la prima delle Equazioni date, suppongo nella (*XV*) $h = 2$, onde avere la formola $F^{(k+1)} L^{2+k} + F(k+1) L^{2-(k+1)}$, scrivo la nostra Equazione come segue

$0 = Ay^2 + By + C$, a norma cioè della (*XVI*), e supponendo, che fatto $x = 1$, questa (*XVI*) si riduca alla (*XXXV*), pongo $F' = A$, $F1 = B$, $F'' = 0$, $F2 = C$, $F''' = 0$, $F3 = 0$, ec.. Ciò eseguito, col fare successivamente $K = 0, 1, 2, 3$, ec., e collocando in luogo delle lettere F', $F1$, F'', $F2$, che ci risultano, i loro valori, determino pel (N.° 466) dalla $F^{(k+1)} L^{2+k} + F(k+1) L^{2-(k+1)}$ le quantità

$\Psi' = AL^2 + BL$,

$\Psi'' = (2AL + B)M + C$,

$\Psi''' = AM + (2AL + B)N$,

$\Psi^{IV} = 2AMN + (2AL + B)P$,

$\Psi^{V} = 2AMP + AN^2 + (2AL + B)Q$,

$\Psi^{VI} = 2AMQ + 2ANP + (2AL + B)R$,

ec.

suppongo ciascuna di queste $= 0$, sciolgo le E-

qua-

quazioni corrispondenti, e ritrovando con ciò $L = \frac{-B}{A}$, $M = \frac{C}{B}$, $N = \frac{AC^2}{B^3}$, $P = \frac{2A^2C^3}{B^5}$, $Q = \frac{5A^3C^4}{B^7}$, $R = \frac{14Q^4C^5}{B^9}$, ec., la serie $y' = -\frac{B}{A} + \frac{C}{B} + \frac{AC^2}{B^3} + \frac{2A^2C^3}{B^5} + \frac{5A^3C^4}{B^7} + \frac{14A^4C^5}{B^9} +$ ec., ci darà una delle radici della (*XXXVI*),

Affine di avere per serie la radice seconda, scrivo nuovamente quì sotto la (*XXXVI*), ma la scrivo ponendo prima il termine By, poscia nella linea superiore il termine Ay^2, e nella inferiore il terzo C: $o = By\begin{matrix}+Ay^2\\+C\end{matrix}$. Ciò fatto, dal paragone di questa con la (*XVI*) avendosi $h = 1$, $F' = B$, $F1 = C$, $F'' = A$, $F2 = o$, $F''' = o$, ec. riduco la (*XV*) alla $F^{(k+1)}L^{1+k} + F(k+1)$ $L^{1-(k+2)}$, e quindi giusta il (N.° 466) trovando essere

$\Psi' = BL + C$,

$\Psi'' = BM + AL^2$,

$\Psi''' = 2ALM + BN$,

$\Psi^{IV} = AM^2 + 2ALN + BP$,

$\Psi^{V} = 2AMN + 2ALP + BQ$,

$\Psi^{VI} = 2AMP + AN^2 + 2ALQ + BR$,

ec.

uguaglio ciascuna di queste quantità allo zero, determino da esse $L = -\frac{C}{B}$, $M = -\frac{AC^2}{B^3}$, $N = -\frac{2A^2C^3}{B^5}$, $P = -\frac{5A^3C^4}{B^7}$, $Q = -\frac{14A^4C^5}{B^9}$, $R = -\frac{42A^5C^6}{B^{11}}$, ec., e avremo la seconda radice

$$y'' = -\frac{C}{B} - \frac{AC^2}{B^3} - \frac{2A^2C^3}{B^5} - \frac{5A^3C^4}{B^7} - \frac{14A^4C^5}{B^9} - \frac{42A^5C^6}{B^{11}}.$$

481. Passiamo a sciogliere l' Equazione (*XXXVII*). Prendendo in essa in primo luogo il termine y^3 come corrispondente al termine $F'y^b$ (*XVI*), faccio $b = 3$, $F' = A$, $F1 = B$, $F'' = 0$, $F2 = C$, $F''' = 0$, $F3 = D$, e converto la (*XV*) nella $F^{(k+1)}L^{3+k} + F(k+1)L^{3-(k+1)}$. Ciò posto, determino col solito metodo le quantità

$$\Psi' = AL^3 + BL^2,$$
$$\Psi'' = (3AL^2 + 2BL)M + CL,$$
$$\Psi''' = (3AL + B)M^2 + CM + (3AL^2 + 2BL)N,$$
$$\Psi^{IV} = AM^3 + (6AL + 2B)MN + CN + (3AL^2 + 2BL)P + D,$$
$$\Psi^{V} = 3AM^2N + (6AL + 2B)MP + (3AL + B)N^2 + CP + (3AL^2 + 2B)Q,$$
ec.

uguaglio queste allo zero, e trovati, come sopra i valori delle quantità L, M, N, P, Q, ec. avremo

$$y' = -\frac{B}{A} + \frac{C}{B} - \frac{C^2}{B^2} - \frac{A^2C^3 + 3ABC^3 + AB^3D}{B^5} +$$

2 A

$$\frac{2\,A\,B^2\,G^4 - 6\,A^2\,B\,C^4 - 3\,A^3\,C^4 - 3\,A^2\,B^3\,C\,D}{B^7} + \text{ec.}$$

Venendo alla determinazione della seconda radice, prendo nella (*XXXVII*) come primo li termine $B y^2$, e in vece di scrivere nuovamente questa Equazione giusta la (*XVI*), come ò fatto nella (*XXXVI*), la lascio per maggiore semplicità come si trova, faccio l' esponente del $B y^2$, cioè il $2 = h$, il coefficiente $B = F'$, chiamo F'', F''', ec. i coefficienti dei termini, che precedono questo, chiamo $F\,1$, $F\,2$, F, $F\,3$, ec. i coefficienti dei termini, che gli succedano, onde sia $F'' = A$, $F''' = 0$, $F\,1 = C$, $F\,2 = D$, $F\,3 = 0$, e dalla (*XV*) determinata $F^{(k+1)}\,L^{2+k} + F(k+1)\,L^{2-(k+1)}$, istituisco il calcolo, come negli esempi precedenti; e da questo otterremo $y'' = \frac{-C}{B} + \frac{B^3\,D - A\,C^3}{B^3\,C} +$

$$\frac{B^6\,D^2 + A\,B^3\,C^3\,D - 2\,A^2\,C^6}{B^5\,C^3} -$$

$$\frac{2\,B^9\,D^3 + 3\,A^2\,B^3\,C^6\,D - 5\,A^3\,C^9}{B^7\,C^5} + \text{ec.}.$$

Finalmente per determinare la radice terza, preso il termine $C y$, faccio $h = 1$, $F' = C$, $F'' = B$, $F''' = A$, $F\,1 = D$, riduco la (*XV*) alla $F^{(k+1)}\,L^{1+k}$ $+ F(k+1)\,L^{1-(k+1)}$, e fatto il solito calcolo ci verrà $y''' = -\frac{D}{C} - \frac{B\,D^2}{C^3} - \frac{2\,B^2\,D^3}{C^5} -$

$$\frac{5\,B^3\,D^4 - A\,C^3\,D^3}{C^7} - \frac{14\,B^4\,D^5 - 5\,A\,B\,C^3\,D^4}{C^9} - \text{ec.}$$

482.

482. In generale volendo per serie una delle radici della (*XVIII*), mi formo la serie $y = L + M + N + P + Q + R +$ ec., e preso un termine qualunque dell' Equazione data, per esempio il termine Hy^{m-n}, faccio l' esponente $m - n = h$, il coefficiente $H = F'$, chiamo F'', F''', ec. i coefficienti dei termini a questo precedenti, chiamo $F\,1$, $F\,2$, ec. i coefficienti dei termini ulteriori, cosicchè $F'' = G$, $F''' = F$, ec., $F\,1 = I$, $F\,2 = K$, ec., e dalla (*XV*) deduco la

$$(XXXIX)\; F^{(k+1)}\; L^{m-n+k} + F(k+1)\, L^{m-n-(k+1)}.$$

In seguito col mezzo di questa formola servendomi del metodo accennato nel (N.° 466) determino le quantità Ψ', Ψ'', Ψ''', ec., avendo sempre presente, che solamente nei risultati compresi dalla $\Psi^{\left(\frac{k(k+1)}{2}+1\right)}$ devonsi aggiungere i valori, che si ànno corrispondentemente dalla (*XXXIX*) (N.° 466); formo le quantità $\Psi' = 0$, $\Psi'' = 0$, $\Psi''' = 0$, ec.; determino da queste i valori delle quantità L, M, N, P, ec., il che sempre otterremo senza ricorrere ad Equazioni di grado superiore al primo (N.[i] 469, 425), e tali valori sostituiti nella (*XXXVIII*) ci daranno il valore domandato della radice.

Questo in generale è il metodo da tenersi per una radice qualunque della (*XVIII*); supponendo poi successivamenre $n = 0, 1, 2, 3,$ ec. $m - 1$, e però in corrispondenza

b	$= m$,	$m-1$,	$m-2$,	$m-3$,	ec.,	1,
F	$= A$,	B,	C,	D,	ec.,	U,
F''	$= 0$,	A,	B,	C,	ec.,	T,
F'''	$= 0$,	0,	A,	B,	ec.,	S,
F^{iv}	$= 0$,	0,	0,	A,	ec.,	R,
ec.				ec.		
$F\,1$	$= B$,	C,	D,	E,	ec.,	V,
$F\,2$	$= C$,	D,	E,	F,	ec.,	0,
$F\,3$	$= D$,	E,	F,	G,	ec.,	0,
ec.				ec.		

Essendo A, B, C = , ec., T, U, V i coefficienti tutti della (*XVIII*); se convertiremo la (*XXXIX*) corrispondentemente nelle

$F^{(k+1)} L^{m+k} + F(k+1) L^{m-(k+1)}$,

$F^{(k+1)} L^{m+(k-1)} + F k + 1 L^{m-(k+2)}$,

$F^{(k+1)} L^{m+(k-2)} + F(k+1) L^{m-(k+3)}$,

$F^{(k+1)} L^{m+(k-3)} + F(k+1) L^{m-(k+4)}$ ec.

$F^{(k+1)} L^{(k+1)} + F(k+1) L^{-k}$, e se replicheremo sempre il medesimo calcolo (N.° 466) ci risulteranno così, come nei due esempi precedenti, tutte le m radici della (*XVIII*).

483. Merita riflessione il caso, in cui qualcuno dei coefficienti A, B, C ec. sia zero. Se sia per esempio zero il coefficiente H, potremo bensì trovare le $m-2$ radici della (*XVIII*), che corrispondono alle supposizioni di $b = m, m-1, m-2$, ec. $m-n+2, m-n-1$, ec., 1; ma le due radici corrispondenti alle ipotesi di $b = m-n+1, m-n$, non restano col nostro metodo determinate dalle (*XXXIV*), *XXXV*) si vede, che nel primo

di

di questi due casi ottiensi

$$y^{(n)} = -\frac{o}{G} + \frac{I}{o} + \frac{G\,l^2}{o} + \text{ec. e nel secondo}$$

$$y^{(n+1)} = -\frac{I}{o} - \frac{G\,l^2}{o} - \frac{2\,G\,l^3}{o}, \text{ec. espressioni amen-}$$

due, delle quali non conosciamo il valore.

Affine di togliere un simile inconveniente, allorchè qualcheduno dei coefficienti della (*XVIII*) è zero, suppongo $y = u + r$, sostituisco, e invece di sciogliere l' Equazione proposta, risolvo la Trasformata, ponendo in seguito $y - r$ invece della u, e dando alla r quel valore, che nelle diverse circostanze vedesi più opportuno a rendere le serie più convergenti.

Se sia per esempio $A\,y^2 + C = o$ l' Equazione data; con la ipotesi di $y = u + r$ la trasformo nella $a\,u^2 + b\,u + c = o$, in cui $a = A$, $b = 2\,A\,r$, $c = A\,r^2 + C$, ottengo pel (N.° 480)

$$u' = -\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a\,c^2}{b^3} + \frac{2\,a^2\,c^3}{b^5} + \frac{5\,a^3\,c^4}{b^7} + \text{ec.}$$

$$u'' = -\frac{c}{b} - \frac{a\,c^2}{b^3} - \frac{2\,a^2\,c^3}{b^5} - \frac{5\,a^3\,c^4}{b^7} - \text{ec.};$$

sostituendo in luogo delle quantità u', u'', a, b, c i valori corrispondenti, e otterremo

$$y' = r - \frac{2\,A\,r}{A} + \frac{A\,r^2 + C}{2\,A\,r} + \frac{A\,(A\,r^2 + C)}{8\,A^3\,r^3} +$$

$$\frac{2\,A^2\,(A\,r^2 + C)^3}{32\,A^5\,r_5} + \frac{5\,A^3\,(A\,r^2 + C)^4}{128\,A^7\,r^7} + \text{ec.}$$

$$y'' = r - \frac{A\,r^2 + C}{2\,A\,r} - \frac{A\,(A\,r^2 + C^2}{8\,A^3\,r^3} -$$

2 A²

$$\frac{2A^2(Ar^2+C)^3}{32A^5r^5} - \frac{5A^3(Ar^2+C)^4}{128A^7r^7} - \text{ec.}$$

Facendo quivi $r=1$, ne verrà

$$y' = -1 + \frac{A+C}{2A} + \frac{(A+C)^2}{8A^2} + \frac{2(A+C)^3}{32A^3} + \frac{5(A+C)^4}{128A^4} + \text{ec.}$$

$$y'' = 1 - \frac{A+C}{2A} - \frac{(A+C)^2}{8A^2} - \frac{2(A+C)^3}{32A^3} - \frac{5(A+C)^4}{128A^4} - \text{ec.}.$$

CAPO VENTESIMO.

Della soluzione per serie delle Equazioni Algebraiche col mezzo delle frazioni continue, e Riflessioni ulteriori intorno alle Equazioni riducibili a grado inferiore.

484. Vogliasi risolvere la $Z=0$ (N.° 413.) riducendo il valor della y in una frazione continua Suppongo perciò

$$(I)\quad y = X' + \cfrac{1}{X'' + \cfrac{1}{X''' + \cfrac{1}{X^{IV} + \cfrac{1}{X^{V} + \cfrac{1}{X^{VI} + \text{ec.}}}}}},$$

in

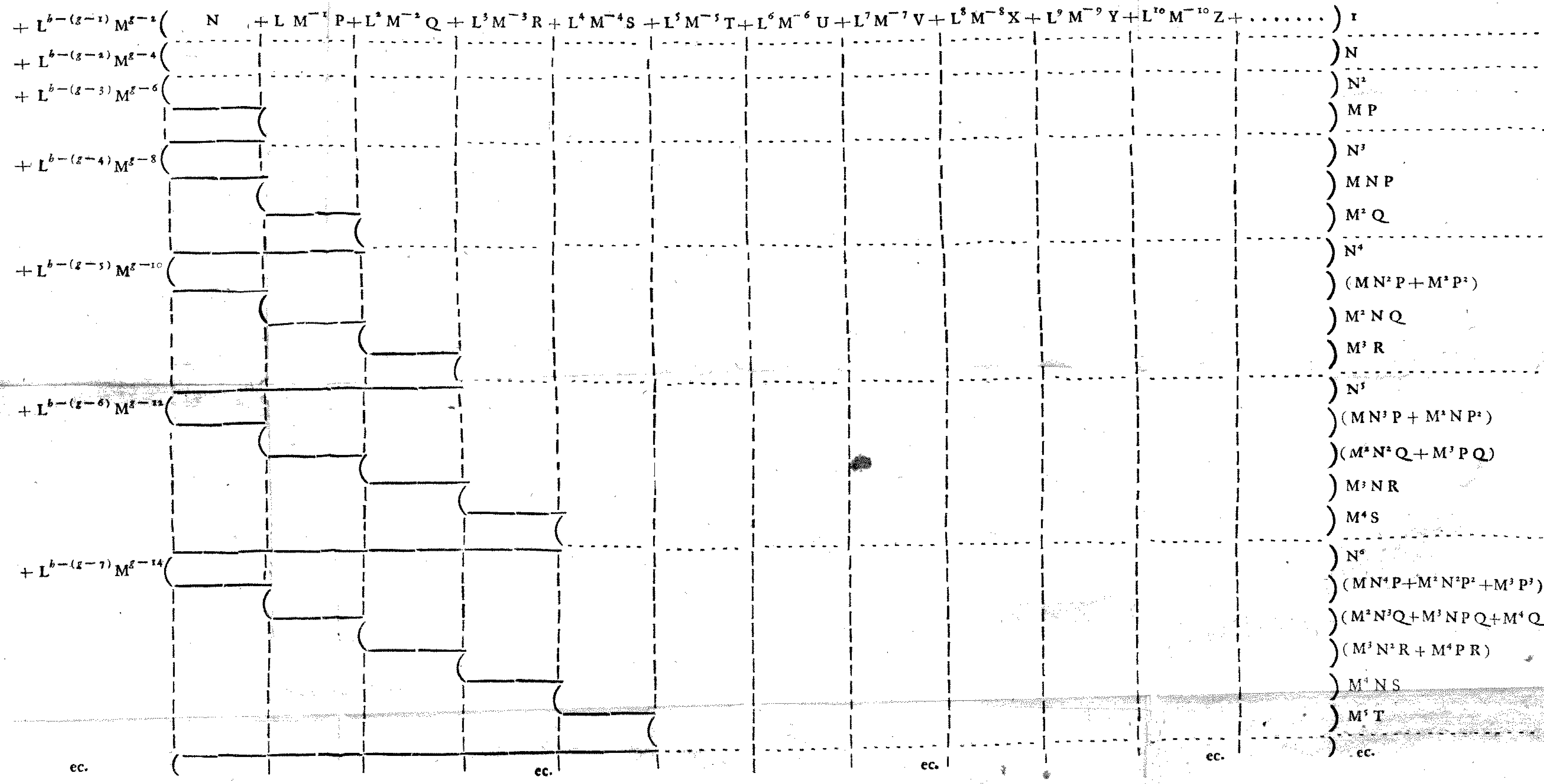
A

(II)

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\ldots\ldots b}{1\cdot2\cdot3\ldots a\cdot1\cdot2\cdot3\ldots b\cdot1\cdot2\cdot3\ldots c\cdot1\cdot2\cdot3\ldots d\ldots}\,L^a M^b N^c P^d\ldots x^{a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta+\ldots}$$

(VII)

$L^{b-g}M^g$



(XIII)

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots b\,F'\;\begin{array}{l}+1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(b+1)F''L^2M^{-1}+1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(b+2)F'''L^5M^{-3}+1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(b+3)F^{IV}L^9M^{-6}+1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(b+4)F^{V}L^{14}M^{-10}+\ldots+1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(b+k)F^{(k+1)}L^{\frac{k(k+3)}{2}}M^{-\frac{k(k+1)}{2}}\\+1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(b-1)F1\;L^{-1}+1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(b-2)F2\,L^{-1}M^{-1}+1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(b-3)F3\,M^{-3}+1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(b-4)F4\,L^2M^{-6}+\ldots+1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(b-k)F(K)L^{\frac{k(k-3)}{2}}M^{-\frac{k(k-1)}{2}}\end{array}$$

in cui $X' = L x^{\alpha}$, $X'' = M x^{\beta}$, $X''' = N x^{\gamma}$, $X^{IV} = P x^{\delta}$, $X^{V} = Q x^{\epsilon}$, $X^{VI} = R x^{\zeta}$, ec. Avendosi $\frac{1}{X^{VI}} = \frac{1}{R x^{\zeta}} = \frac{1}{R} x^{-\zeta}$, ed $X^{V} + \frac{1}{X^{VI}} = Q x^{\epsilon} + \frac{1}{R} x^{-\zeta}$, se sia $-\zeta < \epsilon$; fatto $x = \infty$, dovrà $\frac{1}{X^{VI}}$ svanire rapporto ad X^{V}. Così svanirà $\frac{1}{X^{V}}$ riguardo ad X^{IV} nel caso che sia $-\epsilon < \delta$; scomparirà $\frac{1}{X^{IV}}$ rapporto ad X''', se $-\delta < \gamma$, e così di seguito. Dunque se porremo gli esponenti α, β, γ, δ, ϵ, ec. tali che

(*II*) $\alpha > -\beta$, $\beta > -\gamma$, $\gamma > -\delta$, $\delta > -\epsilon$, ec.,

nella ipotesi di $x = \infty$ la quantità $X' + \frac{1}{X'' + \text{ec.}}$ si cangierà nella X', la $X'' + \frac{1}{X''' + \text{ec.}}$ nella X'', la $X''' + \frac{1}{X^{IV} + \text{ec.}}$ nella X'''; e così in progresso.

Si verifichino in realtà i rapporti (*II*), e ciò presupposto, cerchiamo in primo luogo di determinare l'esponente α, ed il coefficiente L di $L x^{\alpha}$. Faccio perciò $x = \infty$, colloco nella $Z = 0$ in luogo della y il termine $L x^{\alpha}$, e come nel (N.° 413) troverò i due valori, che si domandano.

485. Passando in seguito alla determinazione delle β, M, faccio $X'' + \frac{1}{X''' + \text{ec.}} = u$, onde la

(*I*)

(I) divenga $y = X' \frac{+1}{u}$; sostituisco nella $Z = 0$; e la Trasformata, che ne viene, pel (N.° 81) sarà la

(III) $P\,1\,u^b + Q\,1\,u^{b-1} + R\,1\,u^{b-2} + S\,1\,u^{b-3} +$ ec. $= 0$, essendo i coefficienti $P\,1$, $Q\,1$, $R\,1$, $S\,1$, ec. gli stessi affatto, che quei della Equazione (X) nel (Capo 18.°).

Suppongo ora che la L non abbia che un solo valore $= L'$, come nel (N.° 415), onde in $Q\,1$ la quantità G' (X) capo 18.° non possa essere zero, e faccio $x = \infty$, la nostra Trasformata diventando perciò

(IV) $F'' x^{\pi''} u^b + G' x^{\pi' - \alpha} u^{b-1} + H' x^{\pi' - 2\alpha} u^{b-2} + I' x^{\pi' - 3\alpha} u^{b-3} +$ ec. $= 0$ (N.° 416), e la $u = X'' \frac{+1}{X''' + \text{ec.}}$ convertendosi nella $u = Lx$ (N. prec.), avremo dalla sostituzione la serie di esponenti $b\beta + \pi''$, $(b-1)\beta + \pi' - \alpha$, $(b-2)\beta + \pi' - 2\alpha$, $(b-3)\beta + \pi' - 3\alpha$, ec.

Da questa ricavo per β i valori $\pi' - \pi'' - \alpha$, $\frac{\pi' - \pi''}{2} - \alpha$, $\frac{\pi' - \pi''}{3} - \alpha$, ec.; ma il massimo fra questi deve essere il vero valore di β (N.° 393): dunque sarà $\beta = \pi' - \pi'' - \alpha$; ed essendo $\pi' > \pi''$ (N.i 414, 407) $-\beta = \alpha + \pi'' - \pi'$, avremo difatti $\alpha > -\beta$. Vedremo poi, come nel (N.° 417), che a cagione di $\beta > -\alpha$, essa β non può avere altro valore, che il ritrovato.

In quanto al coefficiente M la (IV) divenendo $F'' M^b x^{b\beta + \pi''} + G' M^{b-1} x^{b\beta + \pi''} = 0$ ci darà

$M =$

$$M = \frac{G'}{F'}.$$

486. Colloco nella (III) $u = M x^{\beta} + \frac{1}{z}$, ne verrà l' Equazione

$$(V)\quad P\,2\,z^{b} + Q\,2\,z^{b-1} + R\,2\,z^{b-2} + S\,2\,z^{b-3} + \text{ec.} = 0$$

essendo

$$P\,2 = P\,1\,M^{b} x^{b\beta} + Q\,1\,M^{b-1} x^{(b+1)\beta} +$$
$$R\,1\,M^{b-2} x^{(b-2)\beta} + S\,1\,M^{b-3} x^{(b-3)\beta} + \text{ec.}$$
$$Q\,2 = b\,P\,1\,M^{b-1} x^{(b-1)\beta} + (b-1)\,Q\,1\,M^{b-2} x^{(b-2)\beta}$$
$$+ (b-2)\,R\,1\,M^{b-3} x^{(b-3)\beta} + \text{ec.}$$
$$R\,2 = \frac{b(b-1)}{2} P\,1\,M^{b-2} x^{(b-2)\beta} +$$
$$\frac{(b-1)(b-2)}{2} Q\,1\,M^{b-3} x^{(b-3)\beta} + \text{ec.}$$
$$S\,2 = \frac{b(b-1)(b-2)}{2\cdot 3} P\,1\,M^{b-3} x^{(b-3)\beta} + \text{ec.}$$

ec. ec.

e gli esponenti della x in $P\,2$ vedesi, che verranno espressi in generale dalla forma $\pi - f\,1\,\alpha + (b - f\,1)\beta$, dando successivamente alla π, ed alla $f\,1$ gli stessi valori del (N.° 408). Così vedremo, che gli esponenti della x in $Q\,2$ vengono rappresentati dalla forma $\pi - f\,1\,\alpha + (b - f\,1 - 1)\beta$, gli esponenti istessi in $R\,2$ si esprimono dalla $\pi - f\,1\,\alpha + (b - f\,1 - 2)\beta$, in $S\,2$ dalla $\pi - f\,1\,\alpha + (b - f\,1 - 3)\beta$, in generale in uno qualunque di questi coefficienti dalla $\pi - f\,1\,\alpha + (b - f\,1 - f\,2)\beta$ (N° 409).

487. Ponghiamo nella (V) $x = \infty$, e perciò $\zeta = N x^{\gamma}$. Poichè in $P\,2$ i due termini

$F'\,M^{b}$

(VI) $F'' M^{b} x^{\pi''+b\beta} + G' M^{b-1} x^{\pi'-\alpha+(b-1)\beta}$ pel valore determinato della β elidonsi fra di loro (N.° 485), e poichè pel valore di α abbiamo costantemente $F'=0$ (N.° 414); suppongasi che il primo termine, il quale per la ipotesi di $x=\infty$ resta in P 2, sia $\pi'''-f1'\alpha+(b-f1')\beta$, e chiamiam qnesto φ' (N. 420). Per determinare in seguito quale sia l' esponente, che nella nostra supposizione sussiste in Q 2, osservo, che i due termini (*VI*) del coefficiente P 2 per la natura della Trasformata in Q 2 divengono
$b F'' M^{b-1} x^{\pi''+(b-1)\beta} + (b-1) G' M^{b-2}$
$x^{\pi'-\alpha+(b-2)\beta}$; ma gli accennati termini (*VI*) si distruggono fra loro; dunque gli altri due di Q 2 si ridurranno al solo $-G' M^{b-2} x^{\pi'-\alpha+(b-2)\beta}$. Ora l' esponente $\pi''+b\beta=\pi'-\alpha+(b-1)\beta$ in P 2 era il massimo (N.° 485); dunque anche l' altro $\pi''+(b-1)\beta=\pi'-\alpha+(b-2)\beta$ sarà il massimo in Q 2, e quello per conseguenza, che sussiste. In conseguenza di questo, e per l' indole della Trasformazione vedesi poscia che l' esponente massimo in R 2 sarà $\pi''+(b-2)\beta=\pi'-\alpha+(b-3)\beta$, in S 2 sarà $\pi''+(b-3)\beta=\pi-\alpha+(b-4)\beta$, e così in progresso.

Sostituisco presentemente $N x^{\gamma}$ in luogo della z, ed avremo la serie di esponenti $\varphi'+b\gamma$, $\pi'-\alpha+(b-2)\beta+(b-1)\gamma$, $\pi'-\alpha+(b-3)\beta+(b-2)\gamma$, $\pi'-\alpha+(b-4)\beta+(b-3)\gamma$, ec. Faccio il solito paragone, e trovo per γ i valori

$\pi'-\varphi$

(VII) $\pi' - \varphi' - \alpha + (b-2)\beta$, $\frac{\pi' - \varphi' - \alpha + (b-3)\beta}{2}$,

$\frac{\pi' - \varphi' - \alpha + (b-4)\beta}{3}$, ec. Ora pel (N.° 485) dovendo essere $\varphi' < \pi'' + b\beta$, ossia $\varphi' < \pi' - \alpha + (b-1)\beta$, supponghiamo $\varphi' = \pi' - \alpha + (b-1)\beta - \Psi$; si collochi nelle quantità (VI) in luogo della φ' questo valore, e avremo i risultati $\Psi - \beta$, $\frac{\Psi}{2} - \beta$, $\frac{\Psi}{3} - \beta$, ec.; ma il primo di tutti questi a cagione di $\Psi > 0$ è maggiore degli altri; dunque anche il primo dei risultati (VII) sarà più grande dei susseguenti; e perciò avremo $\gamma = \pi' - \varphi' - \alpha + (b-2)\beta$. Dovendo poi essere $\beta > -\gamma$ (N.° 484), troverem facilmente non potersi per la γ ottenere altro valore.

Dato alla γ il dovuto valore, chiamato B il coefficiente, che in P_2 corrisponde all' esponente φ' (N.° 421) e fatto $x = \infty$, $z = N x^\gamma$, la (V) si ridurrà alla $B N^b x^{\varphi' + b\gamma} - G' M^{b-2} N^{b-2} x^{\varphi' + b\gamma} = 0$, e però avremo $N = \frac{G' M^{b-2}}{B}$.

488. Facciamo $z = N x^\gamma + \frac{1}{t}$, onde dalla (V) abbiasi la Trasformata

$(VIII)$ $P_3 t^b + Q_3 t^{b-1} + R_3 t^{b-2} + S_3 t^{b-3} + \text{ec.} = 0$

supposto

$P_3 = P_2 N^b x^{b\gamma} + Q_2 N^{b-1} x^{(b-1)\gamma} + R_2 N^{b-2} x^{(b-2)\gamma} + S_2 N^{b-3} x^{(b-3)\gamma} + \text{ec.}$

$$Q\,3 = b\,P\,2\,N^{b-1}\,x^{(b-1)\gamma} + (b-1)\,Q\,2\,N^{b-2}\,x^{(b-2)\gamma}$$
$$+ (b-2)\,R\,2\,N^{b-3}\,x^{(b-3)\gamma} + \text{ec.},$$
$$R\,3 = \frac{b(b-1)}{2}\,P\,2\,N^{b-2}\,x^{(b-2)\gamma} + \frac{(b-1)(b-2)}{2}$$
$$Q\,2\,N^{b-3}\,x^{(b-3)\gamma} + \text{ec.},$$
$$S\,3 = \frac{b(b-1)(b-2)}{2\cdot 3}\,P\,2\,N^{b-3}\,x^{(b-3)\gamma} + \text{ec.},$$

ec. ec.

Ciascun esponente della x in P 3 verrà espresso dalla formola $\pi' - f\,1\,\alpha + (b - f\,1 - f\,2)\beta + (b - f\,2)\gamma$, ciascun esponente in Q 3 verrà rappresentato dalla $\pi - f\,1\,\alpha + (b - f\,1 - f\,2)\beta + (b - f\,2 - 1)\gamma$, in R 3 dalla $\pi - f\,1\,\alpha + (b - f\,1 - f\,2)\beta + (b - f\,2 - 2)\gamma$; e in generale in uno qualunque dei nostri coefficienti l' esponente della x verrà espresso dalla formola
$\pi - f\,1\,\alpha + (b - f\,1 - f\,2)\beta + (b - f\,2 - f\,3)\gamma$.

489. Ciò posto, distruggendosi fra loro i due termini

(*IX*) $B\,N^{b}\,x^{\varphi' + b\gamma} - G'\,M^{b-2}\,N^{b-1}\,x^{\pi - \alpha + (b-2)\beta + (b-1)\gamma}$,

ne' quali l' esponente $\varphi' + b\gamma = \pi' - \alpha + (b-2)\beta + (b-1)\gamma$ è il massimo esponente della x nella (*VIII*) supponghiamo che il termine, il quale in P 3 à l' esponente prossimamente inferiore all' accennato sia $C\,x^{\varphi''}$, essendo $\varphi'' = \pi^{\prime v} - f'\,1\,\alpha + \varphi(b - f''\,1 - f''\,2)\beta + (b - f''\,2)\gamma$ (N.° prec.): Nella trasformazione i due termini (*IX*) in Q 3 divengono $b\,B\,N^{b-1}\,x^{\varphi' + (b-1)\gamma} -$
$(b-1)\,G'\,M^{b-2}\,N^{b-2}\,x^{\pi' - \alpha + (b-2)\beta + (b-2)\gamma} =$

G′ M

$G' M^{b-2} N^{b-2} x^{\pi'-\alpha+(b-2)\beta+(b-2)\gamma}$, e quindi abbiamo in R_3 un termine con l' esponente $\pi'-\alpha+(b-2)\beta+(b-3)\gamma$, in S_3 uno con l' esponente $\pi'-\alpha+(b-2)\beta+(b-4)\gamma$, ec., e frattanto in P_2, e però in P_3, Q_3, R_3, ec. i due termini (*VI*) mancano sempre (N.° 487). Dunque posto $x=\infty$, $t=Px^{b\delta}$ la serie degli esponenti massimi sarà

$$\varphi''+b\delta,\ \pi'-\alpha+(b-2)\beta+(b-2)\gamma+(b-1)\delta,$$
$$\pi'-\alpha+(b-2)\beta+(b-3)\gamma+(b-2)\delta,$$
$$\pi'-\alpha+(b-2)\beta+(b-4)\gamma+(b-3)\delta\text{, ec.}$$

e avendosi da questa i risultati

$$\pi'-\varphi''-\alpha+(b-2)\beta+(b-2)\gamma,$$
$$\frac{\pi'-\varphi''-\alpha+(b-2)\beta+(b-3)\gamma}{2},$$
$$\frac{\pi'-\varphi''-\alpha+(b-2)\beta+(b-4)\gamma}{3}\text{, ec.}$$

troveremo, come nel (N.° 487), dover essere $\delta=\pi'-\varphi''-\alpha+(b-2)\beta+(b-2)\gamma$. Così dovendo risultare $\gamma>-\delta$ (N.° 484) troveremo, che δ non può avere altri valori.

Pel valore determinato della δ ridotta la (*VIII*) alla $CP^b x^{\varphi''+b\delta}+G'M^{b-2}N^{b-2}P^{b-1}x^{\varphi''+b\delta}=0$ ne verrà $P=-\dfrac{G'M^{b-2}N^{b-2}}{C}$.

490. Pongasi $t=Px^{\delta}+\dfrac{r}{s}$, e si trasformi la (*VIII*) nella

(X) $P_4 s^b+Q_4 s^{b-1}+R_4 s^{b-2}+S_4 s^{b-3}+\text{ec.}=0$.

Determinato, come nei (N.^{i} 486, 488), il valore dei

dei Coefficienti P 4, Q 4, R 4, ec. vedremo, come precedentemente, che gli esponenti della x in P 4 sono della forma $\pi - f1\alpha + (b - f1 - f2)\beta + (b - f2 - f3)\gamma + (b - f3)\delta$, in Q 4 della forma $\pi - f1\alpha + (b - f1 - f2)\beta + (b - f2 - f3)\gamma + (b - f3 - 1)\delta$, in R 4 della forma $\pi - f1\alpha + (b - f1 - f2)\beta + (b - f2 - f3)\gamma + (b - f3 - 2)\delta$, e in generale ànno essi la forma $\pi - f1\alpha + (b - f1 - f2)\beta + (b - f2 - f3)\gamma + (b - f3 - f4)\delta$.

Se fatto successivamente $s = Qx^{\varepsilon} + \frac{1}{r}$, $r = Rx^{\zeta} + \frac{1}{q}$, ec., trovassimo le successive Trasformate

$$P5\, r^{b} + Q5\, r^{b-1} + R5\, r^{b-2} + S5\, r^{b-3} + \text{ec.} = 0,$$
$$P6\, q^{b} + Q6\, q^{b-1} + R6\, q^{b-2} + S6\, q^{b-3} + \text{ec.} = 0,$$
$$\text{ec.} \quad \text{ec.}$$

si vedrebbe sempre nella maniera medesima, che la formola generale dell' esponente della x nella prima delle nostre Trasformate sarebbe la

$$\pi - f1\alpha + (b - f1 - f2)\beta + (b - f2 - f3)\gamma + (b - f3 - f4)\delta + (b - f4 - f5)\varepsilon,$$

nella seconda sarebbe

$$\pi - f1\alpha + (b - f1 - f2)\beta + (b - f2 - f3)\gamma + (b - f3 - f4)\delta + (b - f4 - f5)\varepsilon + (b - f5 - f6)\zeta,$$ e così in progresso.

491. Supposto nella (X) $\varphi''' = \pi^{v} - f'''1\alpha + (b - f'''1 - f'''2)\beta + (b - f'''2 - f'''3)\gamma + (b - f'''3)\delta$, sia $Dx^{\varphi'''}$ il primo termine, che sussiste in P 4, essendosi già eliminati i precedenti. Gli esponenti massimi nel Q 4, R 4, S 4, ec. tro-

veremo, come nei (N.[i] 487, 489), essere rispettivamente i seguenti $\pi' - \alpha + (b-2)\beta + (b-2)\gamma + (b-2)\delta$, $\pi' - \alpha + (b-2)\beta + (b-2)\gamma + (b-3)\delta$, $\pi' - \alpha + (b-2)\beta + (b-2)\gamma + (b-4)\delta$, ec. Posto dunque $x = \infty$, e però $s = Qx^{\varepsilon}$, vedremo risultare

$$\varepsilon = \pi' - \phi''' + (b-2)\beta + (b-2)\gamma + (b-2)\delta, \text{ e}$$

$$Q = \frac{G' M^{b-2} N^{b-2} P^{b-2}}{D}.$$

Così supposto

$$\phi^{iv} = \pi^{vi} - f^{iv}1\alpha + (b - f^{v}1 - f^{iv}2)\beta + (b - f^{iv}2 - f^{iv}3)\gamma + (b - f^{iv}3 - f^{iv}4)\delta + (b - f^{iv}4)\varepsilon,$$ ed $E x^{\phi^{iv}}$

il termine, che resta in P 5, troveremo essere

$$\zeta = \pi' - \phi^{iv} + (b-2)\beta + (b-2)\gamma + (b-2)\delta + (b-2)\varepsilon, \text{ ed}$$

$$R = \frac{G' M^{b-2} N^{b-2} P^{b-2} Q^{b-2}}{E}.$$

Lo stesso in seguito

492. Ritrovato nell' esposta maniera il valore degli esponenti α, β, γ, δ, ε, ζ, ec., e quello dei coefficienti L, M, N, P, Q, R, ec., avremo quindi la dovuta determinazione delle quantità $X' = Lx^{\alpha}$, $X'' = Mx^{\beta}$, $X''' = Nx^{\gamma}$, ec., e queste in seguito sostituite nella frazione (*I*) ci daranno uno dei valori della y nella $Z = 0$. Quanto si è detto finora riguardo al valore L' della L supposto nel (N.° 485); dicesi egualmente rapporto agli altri L'', L''', L^{iv}, ec., perchè siano questi tutti disuguali fra loro. Dunque replicando sempre lo stesso calcolo, determineremo per

la

la y altrettanti valori corrispondenti. Che se due, tre, o più dei valori della L sono uguali fra loro, ripetendosi quì pure quanto si è detto nei (N.i 429, seguenti) troveremo nell' istessa guisa, che il calcolo medesimo ci somministrerà bensì tutti i corrispondenti valori della y, ma nelle rispettive determinazioni delle M, N, P, ec. converrà di sovente in quest' ultimo caso cadere per un certo numero di volte a risolvere delle Equazioni di grado superiore al primo: e questo accidente non accaderà mai nel caso considerato da prima.

493. La precedente frazione (l) tanto sarà più convergente al vero valore della y, essendo questa reale, quanto la x è più grande. Supponendo al contrario x infinitesima, potremo determinare le quantità X', X'', X'', ec., come precedentemente, col supporre però $\alpha < -\beta$, $\beta < -\gamma$, $\gamma < -\delta$, ec., e avremo così un' altra frazione continua tanto più approssimantesi al vero valore della nostra y, quanto la x è minore. Trovate poi rapporto a ciascun valore della y sì l' una che l' altra di queste due frazioni, vedesi, che in tal modo verremo ad ottenere completamente la soluzione del Problema propostoci nel (N.° 484).

494. Dimandasi di risolvere per frazioni continue l' Equazione (*XVIII*) del (Cap.° 19.°) supposta come nel (N.° 468).

Riduco l' Equazione data alla (*XXVI*) (Cap. 19) (N.i 469, 470, 471), effettuo sù di quest' ultima il calcolo precedente, faccio nei risultati

 ulti-

ultimi $x = 1$, e però $a = A$, $b = B$, $c = C$, ec., ed in tal modo avremo la soluzione domandata. Ora nella (*XXVI*) trovasi risultare $\beta = 1 - \alpha$, $\gamma = \alpha$, $\delta = 1 - \alpha$, $\varepsilon = \alpha$, $\zeta = 1 - \alpha$, ec., onde la (*I*) diviene

$$y = Lx^{\alpha} + \cfrac{1}{Mx^{1-\alpha} + \cfrac{1}{Nx^{\alpha} + \cfrac{1}{Px^{1-\alpha} + \cfrac{1}{Qx^{\alpha} + \cfrac{1}{Rx^{1-\alpha} + \text{ec.}}}}}}$$

Dunque in questo caso non restando più a determinarsi che i coefficienti L, M, N, P, Q, R, ec., e questi inoltre dipendendo da tante Equazioni tutte del primo grado, potremo per la loro determinazione servirci, se più ci piace, del metodo dei coefficienti indeterminati, col ridurre cioè pel (N.° 361) la frazione continua a frazione ordinaria, col sostituire quest' ultima nella (*XXVI*) (Cap. 19.°) in luogo della y, e con uguagliare allo zero i coefficienti che ci risultano delle diverse potenze della x. Se la (*XVIII*) (Cap.° 19.°) mancasse di qualche termine, ridurrei prima questa, come nel (N.° 483) ad un' altra Equazione non mancante di termine alcuno, supponendo $y = u + r$; scioglierei poscia quest' ultima Equazione, nei valori risultati, porrei $y - r$ in luoguo della u, e finalmente darei alla r il valore, che troverei più opportuno.

495. Sia $ay^2+by+c=0$ l' Equazione data. Fatto per semplicità nella (*XXVI*) (Cap.° 19.°) $\beta=1$, riduco questa alla $ay^2+bxy+cx=0$; trovo quindi $\alpha'=1$, $\alpha''=0$; e corrispondentemente $\beta'=0$, $\beta''=1$; eseguisco finalmente i calcoli precedenti, e fatto $x=1$ troveremo

$$y=-\frac{b}{a}+\cfrac{1}{\frac{b}{c}+\cfrac{1}{\frac{-b}{a}+\cfrac{1}{\frac{b}{c}+\cfrac{1}{\frac{-b}{a}+\cfrac{1}{\frac{b}{c}+\text{ec.}}}}}}$$

$$y''=-\frac{c}{b}+\cfrac{1}{\frac{-b^3}{ac^2}+\cfrac{1}{\frac{c}{2b}+\cfrac{1}{\frac{-4b^3}{ac^2}+\cfrac{1}{\frac{c}{6b}+\cfrac{1}{\frac{-9b^3}{ac^2}+\text{ec.}}}}}}$$

Poichè abbiamo

$$m+\frac{1}{-n+\text{ec.}}=m-\frac{1}{n-\text{ec.}}=(m-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(n-1)-\text{ec.}}},$$

e però

$+m'$

$$m' + \cfrac{1}{-n' + \cfrac{1}{m'' + \cfrac{1}{-n'' + \cfrac{1}{m''' + \cfrac{1}{-n''' + \text{ec.}}}}}}$$

$$= (m'-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(n'-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(m''-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(n''-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(m'''-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(n'''-2) - \text{ec.}}}}}}}}}}$$

i due precedenti valori della y si ridurranno ai seguenti

$$y' = -\frac{b}{a} + \cfrac{1}{\frac{(b-c)}{c} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{(b-2a)}{a} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{(b-2c)}{c} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{(b-2a)}{a} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{(b-c)}{c} - \text{ec.}}}}}}}}}$$

$y' = 1$

$$y'=-\left(\frac{c+b}{b}\right)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{b^3-2ac^2}{ac^2}\right)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{c-4b}{2b}\right)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{4b^3-2ac^2}{ac^2}\right)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{c-12b}{6b}\right)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{9b^3-ac^2}{ac^2}\right)-\text{ec.}}}}}}}}}}}$$

valori, nei quali tutti i successivi denominatori sono ridotti a forma positiva.

496. Mi sia permesso l' aggiungere finalmente alcune riflessioni sulle Equazioni capaci di riduzione. Quantunque siasi dimostrata impossibile la soluzione generale delle Equazioni Algebraiche di grado superiore al quarto; pure l'Equazioni particolari, di qualunque grado esse siansi, meritano una speciale considerazione. La dimostrazione del (Cap. 13.°) versa solamente intorno alle Equazioni generali, Equazioni, nelle quali si prescinde essenzialmente da qualsivoglia valore determinato, e da qualsivoglia privato rapporto fra alcune, o tutte le radici della data; ma in una Equazione particolare, appunto perchè è particolare, le sue radici ànno necessariamente certi valori determinati, e alcune fra loro,

ro, o tutte sono dotate di qualche particolar relazione. Dunque per questa relazione, per quanto si è detto nei (Capi 15.°, 16.°), la nostra Equazione dovrà essere capace di abbassamento, e quindi di soluzione. Prendiamo a considerare quest' ultima proposizione: sebbene potesse questa esser vera in tutta la sua estensione, sebbebene qualsivoglia Equazione particolare potesse per quanto abbiamo detto, essere capace di soluzione; pure da questa non risulta contradizione alcuna con la proposizione del (Numero 290). Colà si parla delle Equazioni generali, e sarà sempre vero, che nella Equazion generale per esempio del quinto grado è impossibile il trovare una formola, la quale ci rappresenti tutte le sue radici indipendentemente dal loro particolare valore: quivi al contrario tenghiam conto dei valori particolari, e dipendentemente da questi cerchiamo le radici della data per dir così ad una ad una.

497. Sia

(D) $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + \text{ec.} = 0$ la data Equazione particolare, e chiamata al solito x', x'', x''', ec. le sue radici, sia $F(x')(x'')(x''')\ldots(x^{\lambda)}) = H$ l' espression del rapporto, che particolarmente esiste fra le λ radici x', x'', x''', ec., $x^{\lambda)}$ della (D) (N.° 321). Se questa Equazion di rapporto contiene dei rotti, e dei radicali, la libero sì dagli uni, che dagli altri, e chiamo

(S) $f(x')(x'')(x''')\ldots(x)^{\lambda)} = K$ l' Equazione, e la lunfunzione intera, e razionale, che da ciò mi risulta. Ora la nostra (S) od è una funzione, quale si suppose la (S) del (N.° 321) nei (N.[i] 322, 324, 1.°, e 2.° 325, 3.° 325 mentre $\lambda < m$, 327, 328, 329, 330, 331, mentre $\eta(\mu + 1) < m$), od è funzione qual fù supposta essa (S) nel (3.° N.° 325 avendosi $\lambda = m$), o quale nei (N.[i] 328, 329, 330, 331 essendo $\eta(\mu + 1) = m$). Nella prima di queste supposizioni il primo membro della nostra (D) sarà sempre dotato di un fattor razionale (N.[i] 323, 326, 332); nella supposizione terza sarà la (D) abbassabile ad un' Equazione del grado $\mu + 1$ (N.° 333); ma nella seconda la nostra Equazione nè è dotata di fattore alcuno razionale, nè è riducibile ad altra di grado minore (N.° 326).

Dunque non possiam dire che la nostra (D), quantunque Equazione particolare, sia sempre capace di abbassamento, e però di soluzione: essa lo sarà, ogni qualvolta sù della sua Equazione di rapporto ridotta razionale, ed intera si verifichi la prima, o la terza delle nostre supposizioni, e non mai quando si verifichi la seconda.

498. Avvi un caso, in cui la (S) sembra compresa nella terza supposizione, ma essendolo solo apparentemente, viene poi in sostanza a comprendersi dalla seconda. Un esempio ce lo dimostrerà chiaramente. Supponghiamo $m = 3$, onde la (D) divenga $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$; avendosi $x' + x'' + x''' = -A$, $x'x''x''' = -C$, colla

 eli-

eliminazione della x''' otterremo $x'^2 x'' + x' x''^2 + A x' x'' = + C$. Sembra questa ultima essere un' Equazione di relazione della forma $f(x', x'') = K$; ma restando essa ancor la medesima col porre la x''' tanto in luogo della x', che in quello della x'', cosicchè abbiamo $x'^2 x''' + x' x'''^2 + A x' x''' = + C$, ed $x''^2 x''' + x'' x'''^2 + A x'' x''' = + C$: in realtà è della forma $f(x', x'', x''') = K$. Dunque questo caso verrà realmente compreso nella supposizione seconda, e non potrà però darci abbassamento veruno della (D).

499. Data la (D) sarebbe desiderabile, che potessimo determinare tutti i casi possibili, in cui essa può ridursi ad altra di grado inferiore, e di assegnare i metodi, onde ottenere attualmente un simile abbassamento.

Se noi conoscessimo la (S), mediante i (Capi 15.°, 16.°) otterremmo subito la soluzione di questo importantissimo Problema, ma essendoci tal funzione ignota, osservo primieramente, che se nella (S) si verificasse la prima delle nostre ipotesi (N.° 497), allora il primo membro della (D) sarebbe dotato di un fattor razionale; comincierò dunque coi metodi del (Capo 14.°) a provare, se esistono in realtà simili fattori razionali dal primo inclusivamente fino al grado $\frac{m}{2}$ *esimo*, se alcuno di questi à luogo, col suo mezzo otterremo l' abbassamento richiesto, se nò, supporremo che nella (S) si verifichi l' ipotesi terza,

e ciò

e ciò presupposto non avremo che a cercare qual sia la (S) medesima; imperciocchè conosciuta questa il (Capo 15.°) ci darà poi la soluzione del Problema.

500. Data la forma di una Equazione di relazione (S) qualunque razionale, determinare, se questa à luogo fra le radici della data (D), e se sì, determinare essa medesima.

Cominciamo dal supporre l' esponente m della (D) numero pari, $\lambda = \eta = 2$, e $\mu + 1 = \frac{m}{2}$ (N.° 331). Poichè le

(XI) $f(x', x'') = K$, che ci risulta, è funzione della x', x'' intera, e razionale (N.° 497), essa non potrà avere che una delle forme seguenti

$$a(x' + x'') = K$$

(XII) $$a(x'^2 + x''^2) + bx'x'' + c(x' + x'') = K$$

$$a(x'^3 + x''^3) + b(x'^2x'' + x'x''^2) + c(x'^2 + x''^2) + dx'x'' + e(x' + x'') = K$$

ec.,

in cui i coefficienti a, b, c, d, ec., K siano tanti numeri per ora indeterminati, ed interi, e dovrà non cambiar di valore per la permutazione di amendue le x', x'' corrispondentemente nelle x''', x^{IV}; x^{V}, x^{VI}; ec. $x^{(m-1)}$, $x^{(m)}$. Prendasi ora una qualunque delle (XII): espressa questa con la (XI), e cambiata la x' nella x, colloco nella (D) la x'' in luogo della x, e col mezzo delle due Equazioni $f(x, x'') - K = 0$, $x''^m + Ax''^{m-1} + Bx''^{m-2} + \text{ec.} = 0$ elimino la x'', ne verrà un' Equazione

 x^m

(*XIII*) $x^n + A' x^{n-1} + B' x^{n-2} + C' x^{n-3} +$ ec. $= 0$, in cui la x' è radice, e nella quale i coefficienti A', B', C', ec. sono Funzioni razionali delle a, b, c, d, ec. K. Per la natura della (*XI*) ciocchè si è detto della x', dicesi egualmente di tutte le altre radici della (*D*); dunque nella (*XIII*) non solo è radice la x', ma tali sono ancora tutte le x'', x''', ec. $x^{(m)}$, e il suo primo membro per con- conseguenza è divisibile esattamente per $(x - x')$ $(x - x'')(x - x''') \ldots\ldots (x - x^{(m)})$. Dunque se dividerò il primo membro della (*XIII*) pel primo della (*D*), e in seguito, trascurato l' avanzo, il quale deve essere zero, se moltiplicherò quest' ultimo primo membro pel quoto, che ci è risultato, il prodotto, che ne viene, sarà identico col primo membro della (*XIII*), e perciò paragonando fra loro i coefficienti omologhi, otteremo un numero n di Equazioni, in cui le incognite saranno le quantità a, b, c, d, ec. K.

Ora chiamando q il grado della x in $f(x, x'') - K = 0$, abbiamo pel (N.° 130) $n = mq$, e se q è numero dispari, cosicchè $q = 2p - 1$, il numero delle a, b, c, d, ec. K vedesi dalle (*XII*) essere $p(p+1)$ e se q è pari, avendosi, $q = 2p$, il numero delle stesse a, b, c, d, ec. K diviene $(p+1)^2$. Dunque l' accennata operazione ci à date $(2p-1)m$, oppure $2pm$ Equazioni con $p(p+1)$, ovvero $(p+1)^2$ incognite corrispondenti. Secondo il diverso valore della p il numero delle Equazioni può essere uguale, maggiore,

e mi-e minore di quello delle indeterminate.

Primo. Supponghiamo, che gli sia uguale: in questa ipotesi elimino dalle n Equazioni trovate le incognite b, c, d, ec. K, ed avuta un' Equazione con la sola a, cerco le radici intere, e razionali di questa. Sia a' una di tali radici, sostituisco questa nelle altre Equazioni, e col metodo istesso cerco i corrispondenti valori interi, e razionali delle altre indeterminate b, c, d, ec. K. Se la a, o qualcuna delle altre b, c, d, ec. K non à questo valore intero, e razionale, allora pel (N.° 497) conchiudo, che neppure la D è dotata della supposta Equazione di relazione. Che se ciascuna delle accennate a, b, c, d, ec., K à un simile valore, allora diremo, che esiste tale Equazione di rapporto, e ci verrà questa determinata col sostituire nella (XI) i ritrovati valori.

Secondo. Il numero delle Equazioni superi quello delle incognite; in questa supposizione scuopriremo nella maniera medesima e il valore delle a, b, c, d, ec., e la determinazione della (XI): acciocchè però in questo caso possiam dire, che la (D) gode della supposta Equazion di rapporto, converrà non solo, che le a, b, c, d, ec., K abbiano dei valori interi, e razionali corrispondenti, ma converrà di più che questi valori sostituiti opportunamente facciano rettificare tutte le n Equazioni.

Terzo. Finalmente il numero delle incognite sia maggiore di quello delle Equazioni: in questo

sto caso le incognite, che vi sono di più, non sono già arbitrarie, ma dovendo essere numeri interi, e razionali (N.° 497), converrà determinarli a norma di questa condizione, cioè coi metodi, che si espongono nell' Algebra degli indeterminati. Supposto per esempio, che essendo le Equazioni di numero n, le incognite siano di numero $n+1$, e supposto che fatte le dovute eliminazioni, giungasi ad un' Equazione finale $f(a)(b) = 0$, trovo seguendo le opportune vie, i valori interi e razionali delle a, b, sostituisco questi nelle altre Equazioni, e avremo così la richiesta Equazione di relazione, seppure esistano tutti i dovuti valori interi, e razionali.

501. Sia

(XIV) $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 3 = 0$ l' Equazion data, e cercasi, se fra le sue radici esiste la prima delle Equazioni di relazione (XII), cioè la $a(x' + x'') = K$. Riduco perciò la (XIV), e la $a(x' + x'') = K$ alle $x''^4 - 8x''^3 + 20x''^2 - 16x'' + 3 = 0$, $a(x + x'') = K$, elimino da queste la x'', e avuta la $x^4 + (8a^4 - 4Ka^3)x^3 + (20a^4 - 24Ka^3 + 6K^2a^2) x^2 + (16a^4 - 40Ka^3 + 24K^2a^2 - 4K^3a)x + 3a^4 - 16Ka^3 + 20K^2a^2 - 8K^3a + K^4 = 0$, divido il primo membro di questa pel primo della (XIV), giacchè il quoto è 1, paragonando i coefficienti omologhi, avremo le Equazioni

$8a^4 - 4Ka^3 = -8$, $20a^4 - 24Ka^3 + 6K^2a^2 = 20$,
$16a^4 - 40Ka^3 + 24K^2a^2 - 4K^3a = -16$,

$3a^4$

$3a^4 - 16Ka^3 + 20K^2a^2 - 8K^3a + K^4 = 3$. Ora dalle prime due di queste Equazioni ricavo $a = 1$, $K = 4$, e questi valori sostituiti nelle altre le fanno verificar tutte. Dunque nella (*XIV*) esiste la supposta Equazion di rapporto, e dividendo essa $x' + x'' = 4$, col suo mezzo potremo pel (N.° 333) ridurre la (*XIV*) ad altra di minor grado.

502. Se l' esponente m della (*D*) sia dispari (N.° 500); allora le radici, che sostituite nella $f(x', x'') = K$ conservano sempre lo stesso valore della funzione giungeranno fino alle $x^{(m-2)}, x^{(m-1)}$, e quindi col loro mezzo la (*D*) avendo pel (N.° 332) un fattor razionale del grado $m - 1$, ne avrà un altro pur anche razionale del grado primo; e questo già determinato (N.° 499) avendoci ridotta con la divisione la (*D*) al grado $m - 1$, praticheremo sù quest' ultima il calcolo precedente.

503. Potrebbe la nostra $f(x', x'')$ esser tale, che rapporto a un certo numero delle radici, per es. rapporto alle prime μ avessimo $f(x', x'') = f(x'', x''') = f(x''', x^{IV}) = \ldots = f(x^{(\mu-2)}, x^{(\mu-1)}) = f(x^{(\mu-1)}, x^{(\mu)}) = K$, e rapporto alle susseguenti risultasse $f(x^{(\mu+1)}, x^{(\mu+2)}) = f(x^{(\mu+3)}, x^{(\mu+4)}) = f(x^{(\mu+5)}, x^{(\mu+6)}) = \ldots\ldots = f(x^{(m-3)}, x^{(m-2)}) = f(x^{(m-1)}, x^{(m)}) = K$. In questo caso i primi valori della nostra funzione costantemente $= K$ essendo in numero di $\mu - 1$, e i secondi in numero di $\frac{m-\mu}{2}$, la (*D*) sarà riducibile, come nei (N.^{i} 331, 333), ad un' Equazione del grado $\mu - 1$

$+$

$+\frac{m-\mu}{2}=\frac{m+\mu-2}{2}$. Nello sciogliere poi il Problema del (N.° 500) volendosi conoscere quando quest' accidente succeda, converrà far attenzione all' Equazione (*XIII*): imperciocchè, quando questo abbia luogo, non difficilmente si vede, che tale Equazione aver deve le radici x'', x''', x^{IV}, ec., $x^{(\mu-1)}$, $x^{(\mu-1)}$, ripetute ciascuna due volte, e le altre x', $x^{(\mu)}$, $x^{(\mu+1)}$, $x^{(\mu+2)}$, ec., $x^{(m)}$ replicate una volta sola. Dunque osserverò da prima se abbiasi n non $< m+\mu-2$ essendo $\mu > 2$, e se sì, determinati i coefficienti A', B', C', ec. osserverò pel (N.° 306), se nella (*XIII*) si contengono $\mu-2$ radici uguali ad altre $\mu-2$. Ciò succedendo la nostra funzione sarà appunto tale quale ora la consideriamo; altrimenti, non lo sarà.

504. Avendosi $\lambda > \eta$ (N.° 331), se la supposta Equazione sia della forma $f(x', x'')(x''')(x^{IV}) = K$; cambiata la x' nella x, eliminerei le tre x'', x''', x^{IV} mediante le Equazioni $f(x', x'')(x''')(x^{IV}) - K = 0$, $x''^m + A x''^{m-1} + B x''^{m-2} + \text{ec.} = 0$, $x'''^m + A x'''^{m-1} + B x'''^{m-2} + \text{ec.} = 0$, $x^{IVm} + A x^{IV\,m-1} + B x^{IV\,m-2} + \text{ec.} = 0$, e in seguito proseguirei il calcolo, come precedentemente, avvertendo, che in questo caso il numero delle indeterminata a, b, c, d, ec., K, sarà maggiore.

505. Ponghiamo l' esponente m multiplo del 3, $\lambda = \eta = 3$, $\mu + 1 = \frac{m}{3}$ (N.° 331), e vogliasi sciogliere il Problema del (N.° 500) in questa

sta supposizione, essendo la $f(x', x'', x''') = K$ funzione intera, e razionale. E' chiaro, che essa dovrà avere la forma

$a(x' + x'' + x''') = K$, oppure la

$a(x'^2 + x''^2 + x'''^2) + b(x'x'' + x'x''' + x''x''')$

$+ c(x' + x'' + x''') = K$, oppure ec., in cui i coefficienti a, b, c, ec., K siano tutti numeri interi. Dunque la soluzione del nostro Problema in questo caso sarà simile affatto alla precedente, eliminando le due x'', x''' dalle tre Equazioni $f(x, x'', x''') - K = o$, $x''^m + A x''^{m-1} + B x''^{m-2}$ $+$ ec. $= o$, $x'''^m + A x'''^{m-1} + B x'''^{m-2} +$ ec. o.

Se la m non fosse molteplice del 3, la (D) avrebbe inoltre un fattor razionale del primo, o del secondo grado, il quale verrebbe determinato mediante il (Capo 14), e pel cui mezzo l'Equazione data ridurrebbesi al grado $m - 1$, oppure $m - 2$. Se quì pure la funzione proposta fosse dotata di qualcuna delle variazioni accennate nei (N.[i] 503, 504), non avremmo a fare che delle riflessioni, e dei cangiamenti di calcolo simili ai precedenti.

506. Lo stesso si dice, e si pratica nella soluzione del nostro Problema, se l' Equazione di relazione proposta sia della forma $f(x', x'', x''', x^{IV})$ $= K$, ovvero $f(x', x'', x''', x^{IV}, x^{V}) = K$, ovvero ec.; e lo stesso ancora come nel (N.° 504), se nella data funzione entrano altre radici oltre le comprese fra le prime due parentesi.

507. Potrebbe succedere, che la funzione da-

ta fosse compresa nel caso del (N.° 498). In allora noi, operando come precedentemente, dopo la determinazione delle *a*, *b*, *c*, *d*, ec., K ricaveremmo una funzione esprimente solo un rapporto generale fra tutte le radici della data (N.° 498), e quindi un rapporto inutile al suo abbassamento (N.° 497). Converrà dunque cercar di conoscere simili funzioni, ed a tal fine basterà porre nella (*D*) in luogo dei coefficienti cogniti tanti coefficienti indeterminati, in seguito operare come nei (N.[i] prec.); e ciò fatto, se pei valori delle *a*, *b*, *c*, *d*, ec., K ci risultano delle funzioni intere, e razionali tra i coefficienti, che abbiam posti indeterminati della (*D*), allora diremo, che la funzione supposta è fra le comprese dal (N.° 498), e perciò deve trascurarsi: che se per le *a*, *b*, *c*, *d*, ec., K non si ottengono funzioni intere, e razionali degli accennati coefficienti, allora la funzione proposta non viene ad includersi nell' esposto caso. In quest' ultima ipotesi poi ponendo nei risultati ottenuti in luogo de' coefficienti indeterminati i suoi veri valori, vedesi, che verremo a risolvere il Problema del (N.° 500) senza rinovare il calcolo dei (N.[i] precedenti).

508. Ecco sciolto il problema del (N.° 500), avendo però sempre considerata l' Equazione di relazione data intera, e razionale; che se questa non fosse tale, la libererei prima come è stato accennato nel (N.° 497) dai rotti, e dagl' irrazionali, e poscia opererei sulla Equazione ottenuta nella sovra esposta maniera.

509. Quanto abbiamo detto finora ci serve a dare delle soluzioni particolari del Problema del (N.° 499); ma per iscioglierlo pienamente, converrebbe poter determinare, se tra le radici della (*D*) à luogo non una data, come nel (N.° 500), ma una qualunque delle Equazioni esposte nei (N.[i] prec.), e in caso che sì, determinare in seguito la sua forma. Sarebbe pur anche assai vantaggioso il trovare le formole generali delle Equazioni, tra le radici delle quali si verifica la prima delle Equazioni (*XII*), quelle, tra le cui radici à luogo la seconda, le altre corrispondenti alla terza, ec., e così riguardo alle altre Equazioni di rapporto dipendenti dalle Equazioni generali dei (N.[i] 504, 505, 506, 507), determinare le formole delle Equazioni, le radici delle quali ammettono la relazione da esse rappresentata. Le Equazioni convertibili (N.° 336) ci esprimono un esempio particolare di queste formole. La loro determinazione poi vedesi, che si otterrà, ponendo nel calcolo dei (N.[i] 500, 504, 507) i coefficienti della (*D*) indeterminati, e cercando in seguito la loro determinazione dalle Equazioni fra i Coefficienti omologhi (N.° 507); in questa guisa si determinò nel (N.° 340) la forma delle Equazioni convertibili; ma per non allungarmi di più in questa Teoria già di troppo prolissa, cesserò per ora da somiglianti ricerche.

F I N E.

INDICE

DEI CAPI.

pag.	*linea*	*Errori*	*Correzioni della Parte II.*
213	19	sostituzione	soluzione
216	12	per z	per z'
217	13	B'^2	B^2
219	16	(Capi 17 ; 18)	(Capi 17, 18, 19 ; 20)
—	21	127	227
220	29	e	è
223	5	$\frac{x'''^2}{x''}$	$\frac{x'''^2}{x'}$
223	24	pei (N.° 103)	pei (N.i 103, 156)
224	25	$\alpha^2 Z$	$\alpha^2 Z'$
227	27	$\alpha, + \alpha^2$	$\alpha + \alpha^2$
230	1	$\frac{C}{4}$	$\frac{C^2}{4}$
230	3, 4	$-\frac{C^2}{2}$	$-\frac{C}{2}$
231	4	soluzione (N)	soluzione della (N)
231	8, 17	la 2.ª = 5.ª, la 3.ª = 6.ª	la 2.ª = 6.ª, la 3.ª = 5.ª
232	2	(N.° 201)	(N.° 202)
—	10	119	199
—	22	2.ª = 5.ª = 4.ª, la 3.ª = 6.ª = 5.ª	2.ª = 6.ª = 5.ª, la 3.ª = 5.ª = 4.ª
233	19	conducendosi	conducendoci
234	13	(N.° 258)	(N.° 158)
—	20	qualità	quantità
235	4	208	209
237	20	(N.° 227)	(N.° 213)
238	5	$\frac{2x''-3}{6}$	$\frac{2x''\sqrt{-3}}{6}$
—	8	$-\frac{1+\sqrt{-3}}{6}x''-\frac{1-\sqrt{-3}}{6}x'''$	$-\frac{1-\sqrt{-3}}{6}x''-\frac{1+\sqrt{-3}}{6}x'''$
—	9	$+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\frac{x''}{3}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\frac{x'''}{3}$	$+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\frac{x''}{3}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\frac{x'''}{3}$
—	10	$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\alpha$	$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\alpha$

pag.	linea	Errori	Correzioni
238	17	230	232
239	3	$Z, = z$	$Z = z$
240	20	$\frac{24}{2.22}$	$\frac{24}{2.2.2}$
241	8, 9, 15, 16		*le $x'\ x''\ x'''\ x^{iv}$ poste entro le parentesi vanno sempre ogni due frammezzate con una virgola.*
242	18	o $(x'' + x^{iv})$	o $(x''' + x^{iv})$
248	4	x' in x'''	x' in x''
250	5	$f(x'')(x''')(x')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})$ composta	$f(x'')(x''')(x')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})$ per una permutazione composta
—	12	$((x', x'')$	$f((x', x'')$
251	23	dalla y (N.° 92)	della y (N.° 93)
255	11	le	le $x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}$. Vedesi questo nell' esempio seguente
258	13	competenti	componenti
263	17	saranno	siano
264	1	$f(x', x''', x^{iv})(x^{v})(x')$	$f(x'', x''', x^{iv})(x^{v})(x')$
264	18	(N.° 266)	(N.i 266, 267)
267	ultima	2.°. Ma questo precedente 2.°	3.°. Ma questo precedente 3.°
268	2	il terzo	il quinto
—	3	casi 2.°, e 3.°	casi 3.°, e 5.°
—	19	di una fila delle prime	di una delle prime
272	4	237.	273.
—	13	esse	esso
279	3	ciascuna	e ciascuna
—	22	(N.i 262, 263, 267, 271)	(N.i 262, 263, 267, 265, 270, 271)
—	30	5.°	5
275	9	questa	questo
276	1	Z^{5}	Z^{v}
277	27	M 1 —	M 1 =
285	13	= 9	= o
285	16	(*XVI*)	(*XIV*)
285	19	sin della	sù delle
286	21	< 4	> 4

pag.	*linea*	*Errori*	*Correzioni*
287	11	della Trasformata	delle Trasformate
290	8	esso	esse
—	15	277	227
293	8	$\frac{Z}{F}$	$\frac{z}{F}$
298	11	$2\,\alpha$	$B\,\alpha$
—	16	co	te
—	17	te, b	co, e
—	18	$B + e$	$B + b$
295	2	1	-1
298	11	$-4x^2$	$-4x^3$
—	19	quoziente	quoziente -1
300	15	$\frac{ap+3}{4a+1}$	$\frac{ap+3}{2a+1}$
—	18	$201\,a^2$	$210\,a^2$
303	ultima	$(x - \alpha)(x - \gamma)$	$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$
304	22	$32x^3 - 22x$	$32x^3 - 12x^2 - 22x$
305	1	$+4 - 1 = X$	$+4x - 1 = X'$
—	4	x''	X''
308	6	dimostrazione	determinazione
309	ultima	$p^2\,D$	$p^3\,D$
312	26	per se	per x
314	20	$(x - \pi)$	$(px - \pi)$
315	28	$b\,x^{3(b-2)}$	$b\,x^{2(b-2)}$
319	3	$+10$	-10
319	20	$x^{(\lambda)}$	$x - x^{(\lambda)}$
320	6	$+a$	$+$ ec.
—	20	$f(x', x'', x''')$	$f(x', x'')(x''')$
322	2	$x^{\lambda+1}, x^{\lambda+2}, x^{\lambda+3}$,	$x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, x^{(\lambda+3)}$
323	5	le	Dunque se
—	ultima.	Supponghiamo	331. Supponghiamo
326	8	u	ec.
327	20	(N.° 144)	(N.° 142)
331	16	$r\,c^r\,y^{r-2}$	$r\,c^2\,y^{r-2}$
332	8	$\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)}{2.3.4}$	$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}$
—	14	$\frac{n(n-5)}{2}; \frac{n(n-6)(n-7)}{2.3}$	$\frac{(n-2)(n-5)}{2}; \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{2.3}$

pag.	*linea*	*Errori*	*Correzioni*
333	12	$\frac{n(n-4)}{2}$	$\frac{(n-1)(n-4)}{2}$
—	penult.	posta	nostra
335	2	$\pm A$	$\pm C$
—	ultima	$= A c^2 p x$	$- A c^2 p x$
339	1	(N.° 144)	(N.° 242)
339	26	(T)	(S)
340	10		
344	1		
345	12		
339	ultima	a	G
340	5	(I)	I
343	15	(*IV*)	(*IX*)
344	9	T	F
—	17	α'	α
347	20	$a^{(\mu+1)} + g a^{\mu} + b a^{\mu-1} + z a^{\mu-2} + \text{ec.} = 0$	$a^{\mu+1} + \alpha a^{\mu} + \beta a^{\mu-1} + \gamma a^{\mu-2} + \text{ec.} = 0$
353	16	(N.° 356)	(N.° 357)
—	22	$r\ t\ p$	$r + p$
354	26	(*VI*)	(*IV*)
355	14	terza	seconda
356	23		
355	ultima	5707963	15707963
356	21	D′C − D′G	D C′ − D′C
357	18	del	dal
—	19	$>$	$<$
360	12	$r - 2$	$r - 1$
361	7	(*IX*)	(X)
362	6	(X)	(*IX*)
363	24	$\frac{22}{7}, \frac{355}{113}$	$\frac{22}{7}$, ec. $\frac{355}{113}$
368	23	radici	radici reali
—	26	radice	radice reale
369	ultima	faranno	saranno
370	17	quantità	le quantità
375	3	*m* − 2 *esime*	*m* − 2 *esime*, ec.

pag.	*linea*	*Errori*	*Correzioni*
378	18	383	382
379	1	70 u	20 u
387	11	$x^{m'}a + n'^{v}$	$x^{m^{iv}}a + n^{iv}$
388	20	$A' L^{n'}$	$A' L^{m'}$
389	9	$- 5 x^2 b^4$	$- 5 a^2 b^4$
392	26	da	ad
393	1	sultante	risultante
—	2	(N.° 420)	(N.° 400)
—	22	$a L x^{4\alpha+2}$	$a L^4 x^{4\alpha+2}$
—	28	$a^4 L^4 x^0$	$a L^4 x^0$
—	29	$L x^0$	$L x^{-\frac{1}{4}}$
—	8	scielto	sciolto
394	8	$b L^{b-k-2}$	$b L^{b-k-2}$
395			
397	10	$a L^{b'}$	$a L^{b}$
398	13	Q 1 rappresentato	Q 1 è rappresentato
—	18	$f\alpha$	$f 1 \alpha$
399	16	(X)	(XI)
402	16	$F' x^{\pi}$	$F' x^{\pi'}$
—	23	$x^{(b'-1)\alpha+g}$	$x^{(b'-1)+g'}$
403	2	P I	P 1
—	13	stando	restando
405	25		
407	4, 8	π^{iv}	$\pi^{v'}$
413	27		
414	1, 18		
407	22	$\gamma - \varphi'$	$\gamma = \varphi'$
408	5	$f 2''$	$f 2'$
415	7	$H' M^2 x^{\pi'} - \alpha + \beta$	$H' M^2 x^{\pi'} - 2'\alpha + 2\beta$
419	ultima	2 M 5	2 M S
420	2	$P - \pm \frac{49}{2\sqrt{3}}$	$P = \pm \frac{49}{2\sqrt{3}}$
426	1	$a^3 x^2$	$c^3 x^2$
427	6	Y	(Y)
—	15	g	g'
433	23	Dunque	451. Dunque
434	2	sottraendo questa	sottraendo da questa
—	3	dall' altra	l' altra

pag.	*linea*	*Errori*	*Correzioni*
436	9	interi	interi positivi
437	14	$L^{b-(z-7)}$	$L^{b-(z-8)}$
439	5	esser	esse
443	12	N 2	N^2
444	21	$(b-)$	$(b-1)$
447	10	della	delle
450	3	$L^{i-(b-1)}$	$L^{i-(i-1)}$
453	13	$L^{b-1}(PbF'$	$L^{b-1}P(F'$
458	7	$F(k+1)^{\frac{k(k+3)}{2}}$	$F(k+1)L^{\frac{k(k+3)}{2}}$
—	8	$FL^{(k+1)b+k}$	$F^{(k+1)}L^{b+k}$
459	4	$L^{-1}P$	$L^{-1}Q$
460	3	$F1x^{(p+)}$	$F1x^{(p+\alpha)}$
460	6	$(2F1L+1)$	$(2F1L+F1)$
—	7	$3F'L^2M$	$3F''L^2M$
462	19	$m\,a$	$m\,\alpha$
463	ultima	valore 3β	valore $<3\beta$
464	12	Valendosi questi esponenti tutti i numeri	Volendosi questi esponenti tutti numeri
—	23, 24	$\frac{n^2-n}{2}$	$\frac{n^2-n}{2}$
466	6	$\frac{n(-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
468	1	$r+4$	$r+1$
469	4	$\pi'=\pi^{\prime V}$	$\pi'-\pi^{\prime V}$
471	15	$+F1^3F''$	$-F1^3F''$
473	9	(XV)	$(XXXV)$
474	12	$L^{2-(i+1)}$	$L^{2-(k+1)}$
—	25	AM	AM^2
476	20	$(3AL^2+B)$	$(3AL^2+BL)$
479	11	A, B, C =, ec.	A, B, C, ec.
—	15	$Fk+1$	$F(k+1)$
—	penul.	determinate	determinate.
480	21	$\frac{A(Ar^2+C)}{8A^3r^3}$	$\frac{A(Ar^2+C)^2}{8A^3r^3}$
483	14	Lx	$Lx\beta$
484	1	$\frac{G'}{F'}$	$\frac{G'}{F''}$

pag.	*linea*	*Errori*	*Correzioni*
484	6	$x^{(b+1)}$	$x^{(b-1)}$
490	10	$+(h-f^{v}1-f^{v}2)\beta$	$+(h-f^{IV}1-f^{V}2)\beta$
490	26	perchè	purchè
491	16	X', X'', X''	X', X'', X'''
496	ultima	l' Equazione , e la	l' Equazione , o la
498	27	$\frac{m}{2}$ *esime* ,	$\frac{m}{2}$ *esime* :
499	11	Poichè le	Poichè la
500	23	avendosi , $q=2p$	avendosi $q=2p$
503	11	funzione giunge-ranno	funzione , giungeranno
503	21	$f(x^{\mu-2)}, x^{\mu-1)})$	$f(x^{(\mu-2)}, x^{(\mu-1)})$
504	24	indeterminata	indeterminate